



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA**  
**Scuola di Ingegneria**



**Corso di**  
***TECNICA DELLE COSTRUZIONI***

**LO STATO LIMITE ULTIMO**  
**PER TENSIONI NORMALI**

**Docente:**  
**Prof. Ing. Angelo MASI**

**Collaboratori:**  
**Ing. Vincenzo MANFREDI**  
**Ing. Giuseppe VENTURA**

# Stato Limite Ultimo (SLU) per tensioni normali

TRAVI IN INFLESSE IN C.A.: dalla analisi lineare alla **analisi NON lineare**

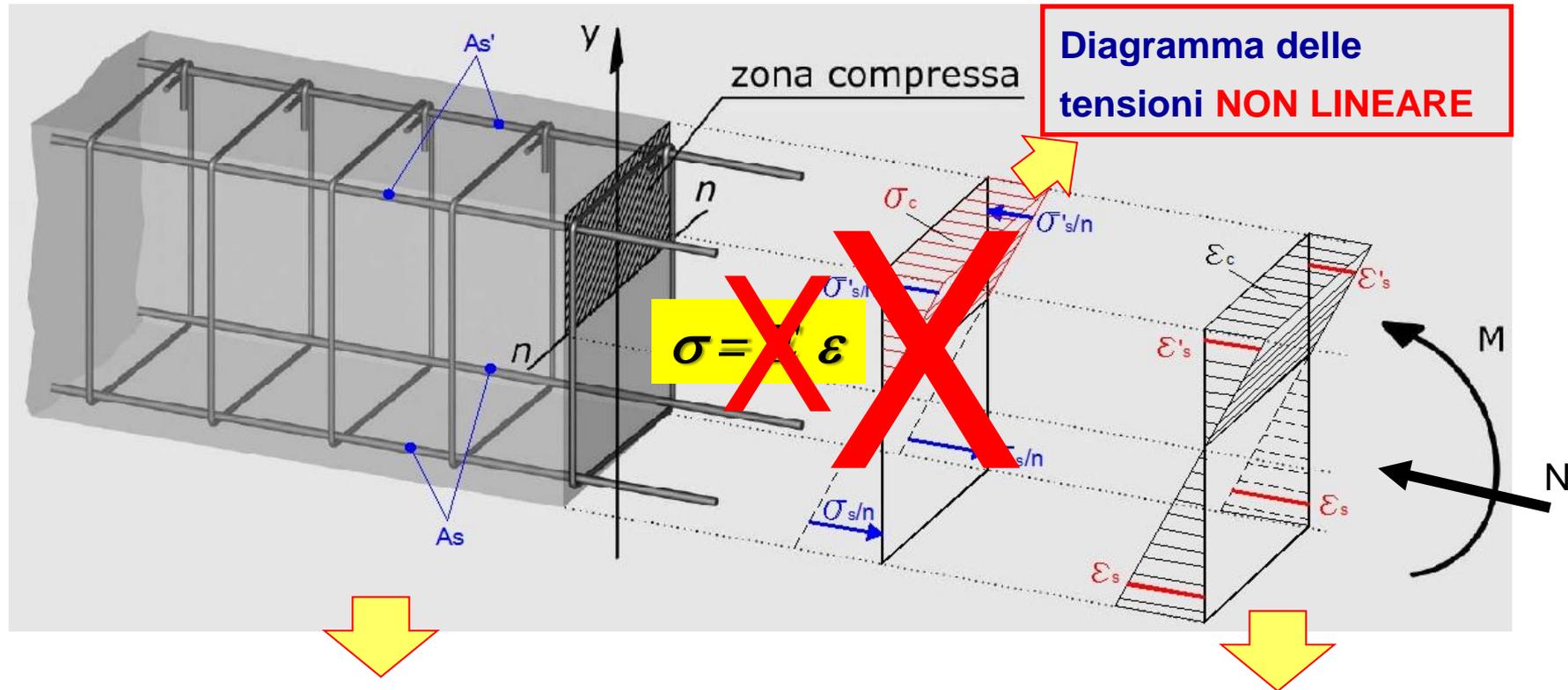


Diagramma delle tensioni **NON LINEARE**

~~$\sigma = \epsilon$~~

Trave in c.a. con armatura superiore compressa (As') e armatura inferiore tesa (As)

Diagramma lineare delle deformazioni

# SLU per SFORZO NORMALE E FLESSIONE

## Capitolo 4 del Decreto Ministeriale 17.01.2018 - NTC-18

### §4.1.2.3 - STATI LIMITE ULTIMI

#### §4.1.2.3.4 – Resistenza flessionale in presenza e in assenza di sforzo assiale

### IPOTESI DI CALCOLO

- conservazione delle sezioni piane
- perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo
- resistenza a trazione del calcestruzzo nulla
- ✓ **la crisi del cls è determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima a compressione**
- ✓ **le tensioni del cls e dell'armatura sono valutate attraverso i diagrammi tensioni-deformazione ( $\sigma$ - $\varepsilon$ )**

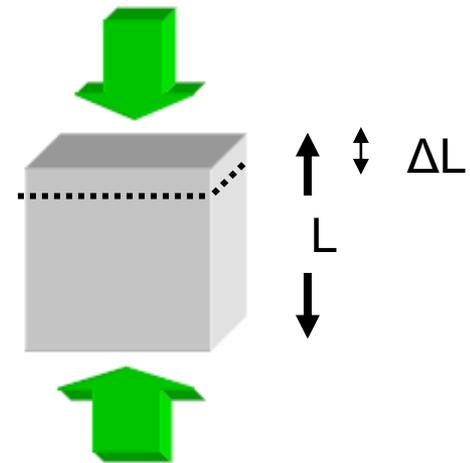
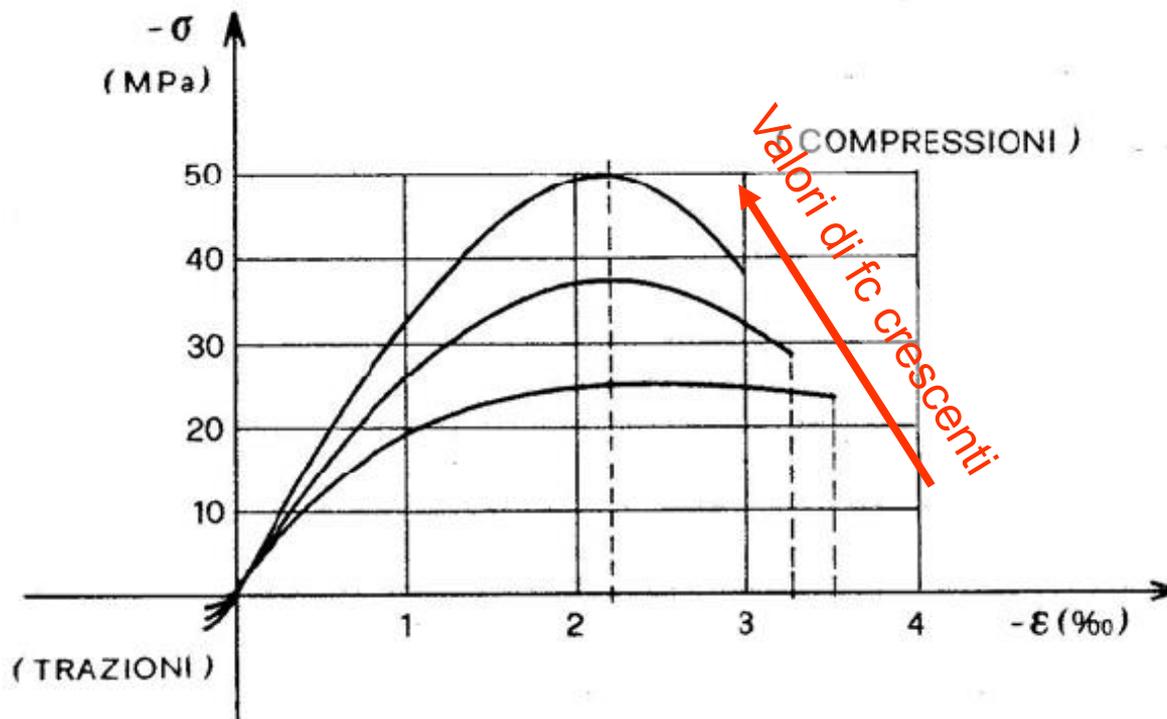
**Viene abbandonata l'ipotesi di comportamento elastico dei materiali !!**

# IL COMPORTAMENTO MECCANICO DEL CLS

I risultati di una **prova di compressione** sono generalmente restituiti sotto forma di **diagramma tensioni-deformazioni** ( $\sigma$ - $\epsilon$ ).

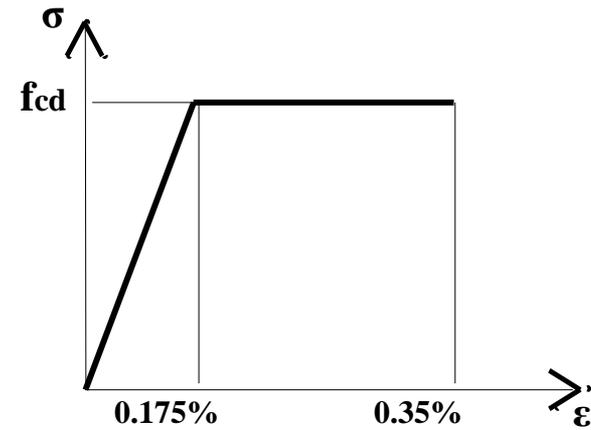
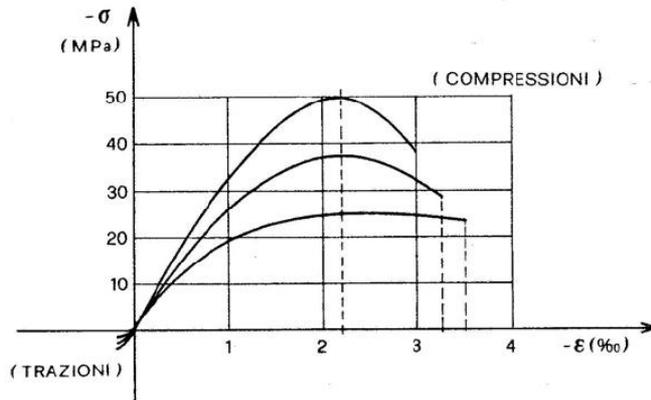
$\sigma = P/A$  (P carico; A area del provino)

$\epsilon = \Delta L/L$  ( $\Delta L$  accorciamento e L lunghezza originaria del provino)

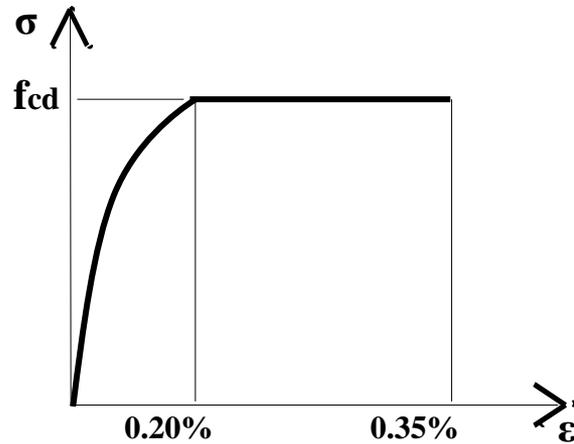


# DIAGRAMMI DI CALCOLO TENSIONI – DEFORMAZIONI DEL CLS

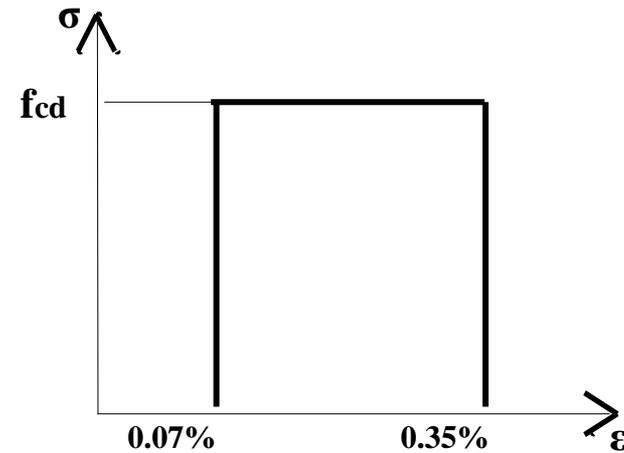
## §4.1.2.1.1 – Resistenza di progetto a compressione del calcestruzzo



(b) triangolo-rettangolo



(a) parabola-rettangolo

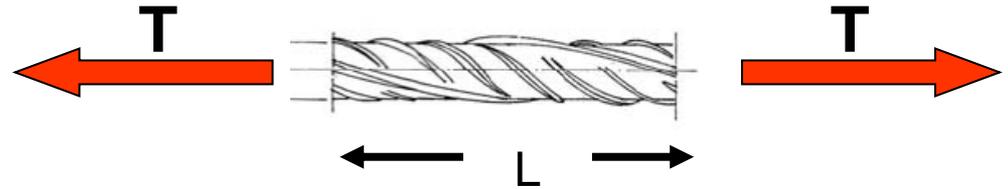


(c) rettangolo (stress block)

$f_{cd}$  = resistenza di calcolo a compressione

# L'ACCIAIO DA C.A.

Sottoponendo una **barra di acciaio** a **prova di trazione** si ottengono diversi tipi di diagrammi ( $\sigma$ - $\epsilon$ ).



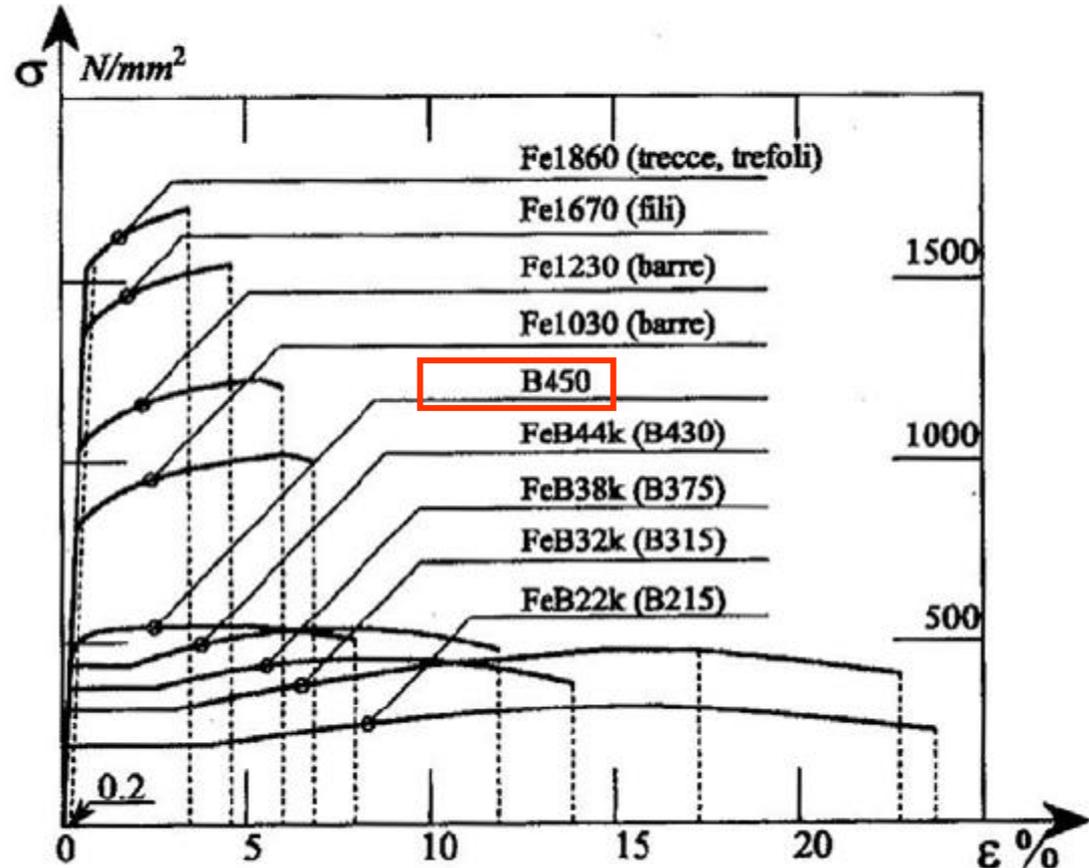
Per gli acciai da c.a., la norma italiana NTC-18 prevede due tipi, indicati con le sigle B450A e **B450C**.

Di fatto può essere utilizzato soltanto il B450C, che è obbligatorio in zona sismica, avente i seguenti valori nominali delle proprietà meccaniche:

$$f_{y,nom} = 450 \text{ MPa}$$

$$f_{t,nom} = 540 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{uk} \geq 7.5\%$$



# DIAGRAMMI DI CALCOLO TENSIONI – DEFORMAZIONE DELL'ACCIAIO

## §4.1.2.1.1.3 – Resistenza di progetto dell'acciaio

### a) bi-lineare con incrudimento

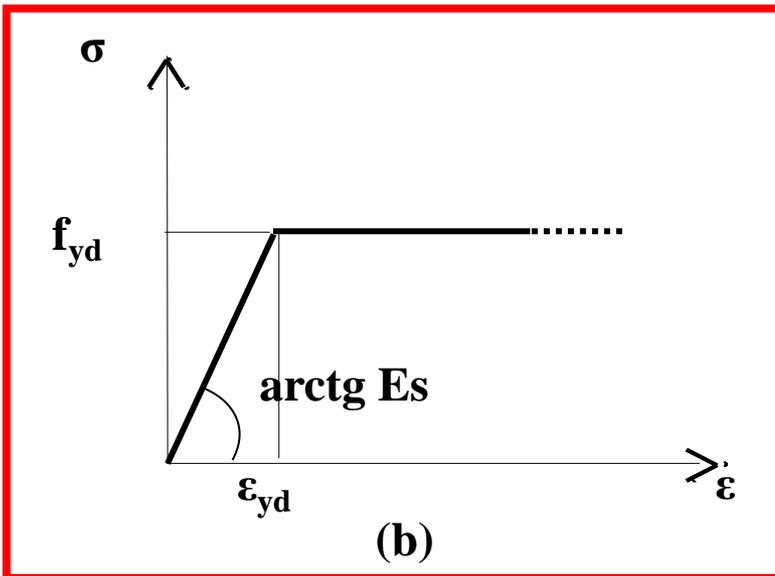
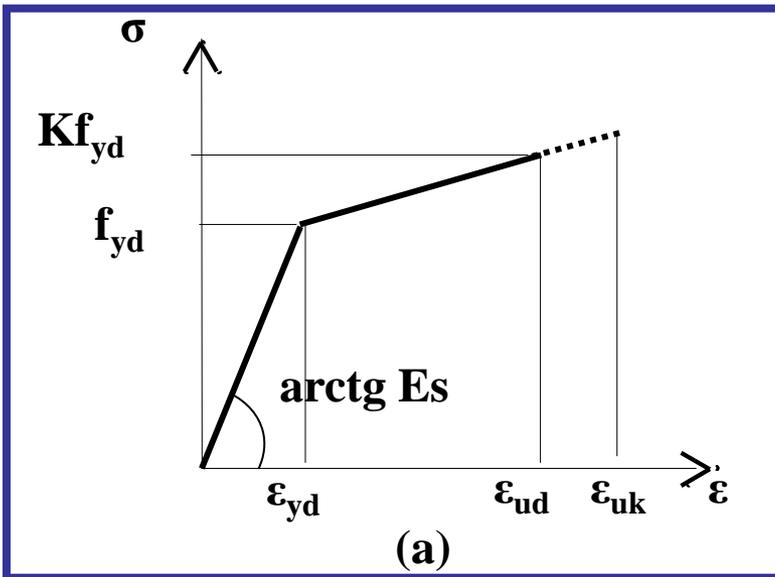
$$\varepsilon_{ud} = 0.9 \varepsilon_{uk}$$

$$\varepsilon_{uk} = \geq 7.5\%$$

$$K = f_{yk}/f_{yd} \quad (1.35 > K \geq 1.15)$$

(valori per acciaio B450C, § 11.3.2.1 NTC-18)

### b) elastico-perfettamente plastico indefinito



# RESISTENZE DI CALCOLO

## §4.1.2.1.1 Resistenze di progetto dei materiali

Le **resistenze di calcolo** si valutano mediante l'espressione:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m}$$

dove  **$f_k$**  è la **resistenza caratteristica**,  **$\gamma_m$**  il **coefficiente parziale del materiale**.

Per elementi strutturali in c.a., la normativa NTC18 prescrive :

		$\gamma_m$
calcestruzzo	$\gamma_C$	1.5
acciaio per cls	$\gamma_S$	1.15

# PARAMETRI DI RESISTENZA DEL CALCESTRUZZO

## Resistenza di calcolo a compressione

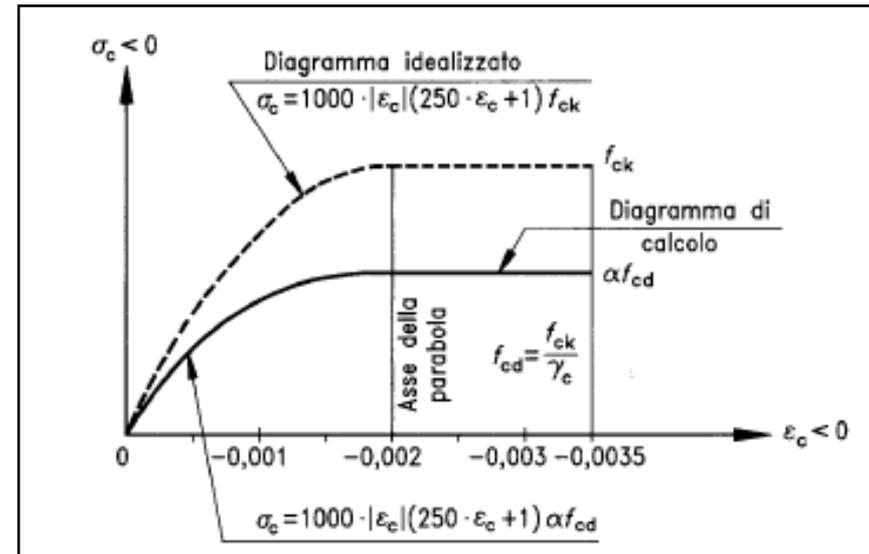
$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} \cdot f_{ck}}{\gamma_c}$$

$$f_{ck} = R_{ck} \cdot 0.83$$

valore caratteristico della resistenza cilindrica

$$\alpha_{cc} = 0.85$$

coefficiente per carichi di lunga durata



## Altri parametri meccanici

Resistenza media a trazione:  $f_{ctm} = 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3}$

Modulo elastico:  $E_{cm} = 22000 \cdot [f_{cm} / 10]^{0.3}$  dove:  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  [in N/mm<sup>2</sup>]

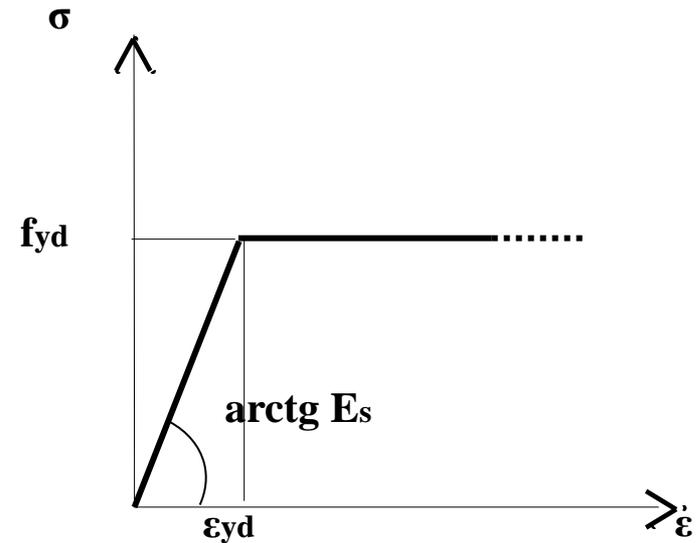
Modulo di Poisson:  $\nu = 0.2$  [per cls fessurato si può porre  $\nu = 0$ ]

# PARAMETRI DI RESISTENZA DELL'ACCIAIO

## Resistenza a trazione/compressione

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$f_{yk}$  è la resistenza caratteristica di snervamento



## Altri parametri meccanici

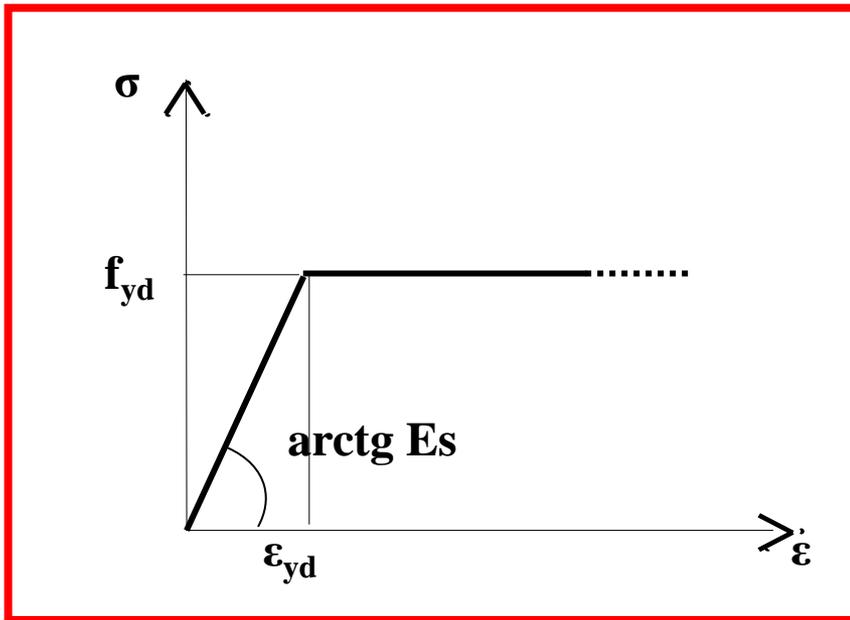
Modulo elastico:  $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$

Deformazione al limite elastico:  $\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$

Ad es. per un acciaio B450C si ha:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1.15} = 391.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{391.3}{210000} = 0.186\%$$



**Diagramma elastico-perfettamente plastico indefinito**

## Equazioni costitutive (acciaio teso)

$$\epsilon_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s$$

$$\epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

...allo stesso modo per acciaio compresso:

$$\epsilon'_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \epsilon'_s \cdot E_s$$

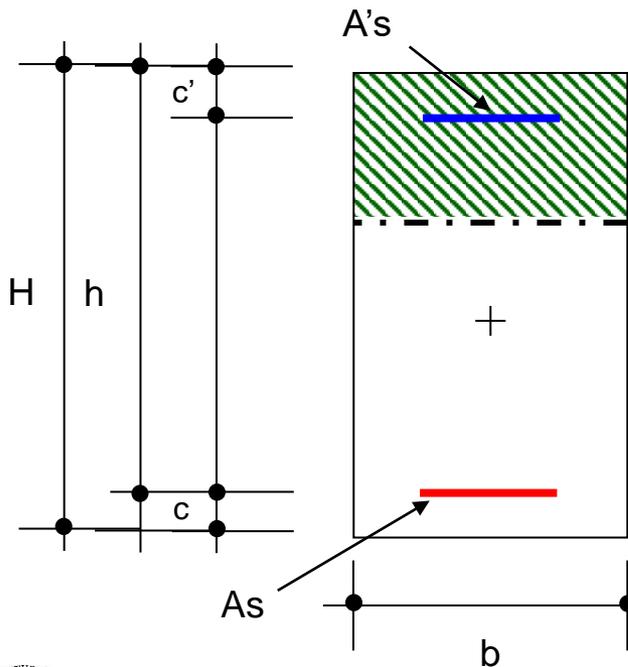
$$\epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

## Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

$N_{Ed}$  e  $M_{Ed}$  = valori di calcolo dello sforzo normale e del momento flettente agenti sulla sezione



## Equazioni costitutive (acciaio)

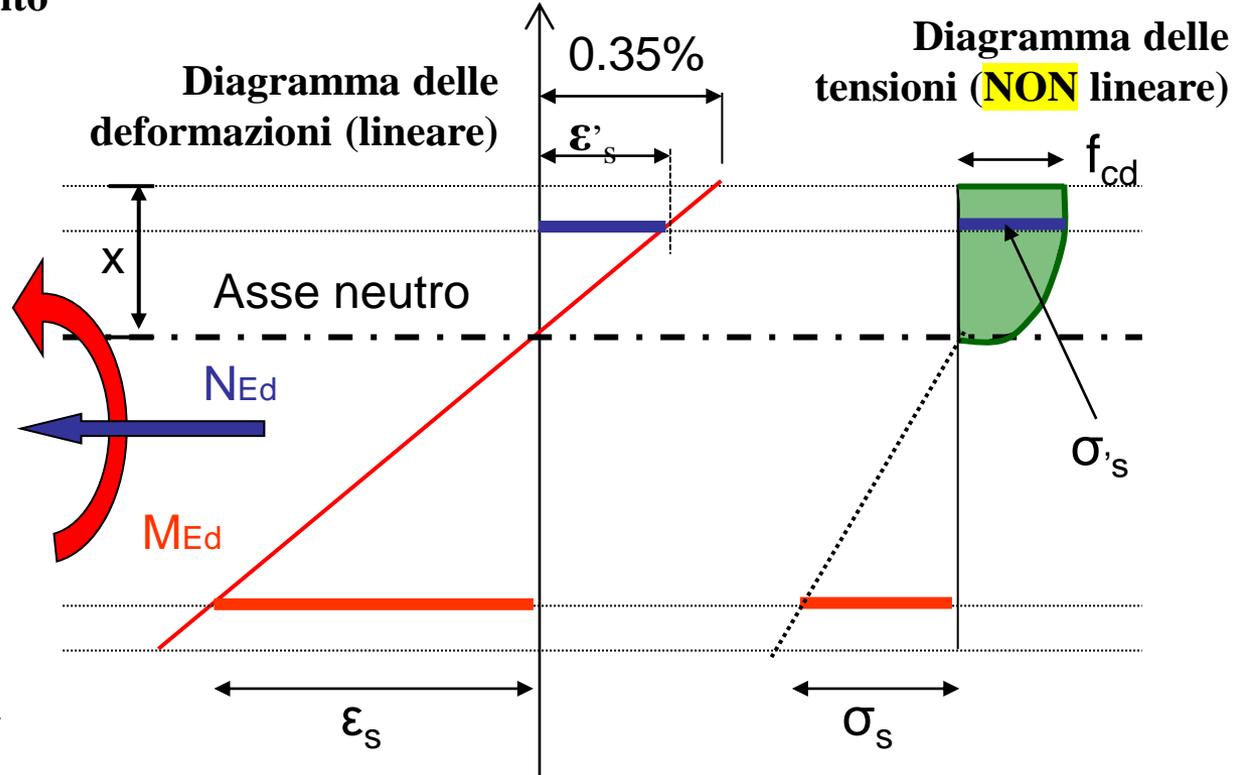
$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

oppure

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$



# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Risultante di compressione (CLS)

$$C = b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd}$$

dove:

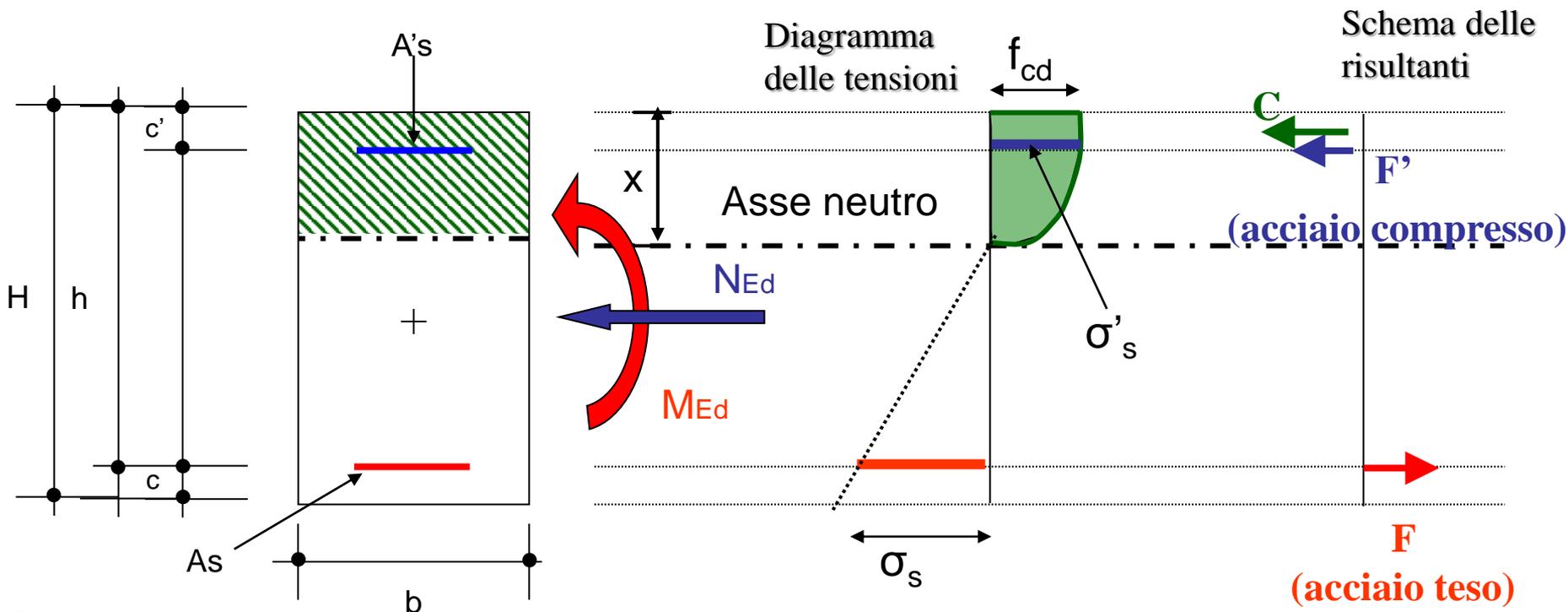
$$\psi = \frac{\int_0^x \sigma(y) dy}{f_{cd} x}$$

Risultante di compressione (acciaio)

$$F' = A'_s \cdot \sigma'_s$$

Risultante di trazione (acciaio)

$$F = A_s \cdot \sigma_s$$



# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

## EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

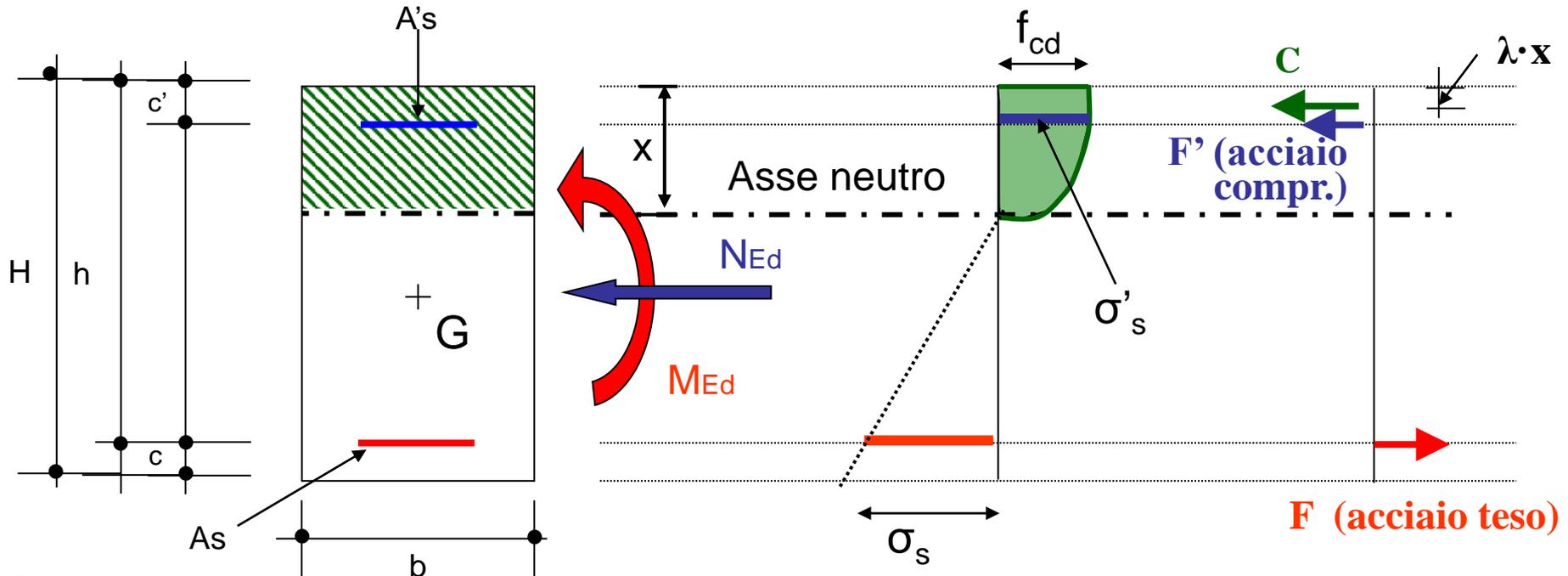
$$N_{Ed} = -b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot \sigma_s$$

*Equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave*

dove: 
$$\lambda = \frac{1}{x} \cdot \frac{\int_0^x \sigma(y)(x-y)dy}{\int_0^x \sigma(y)dy}$$

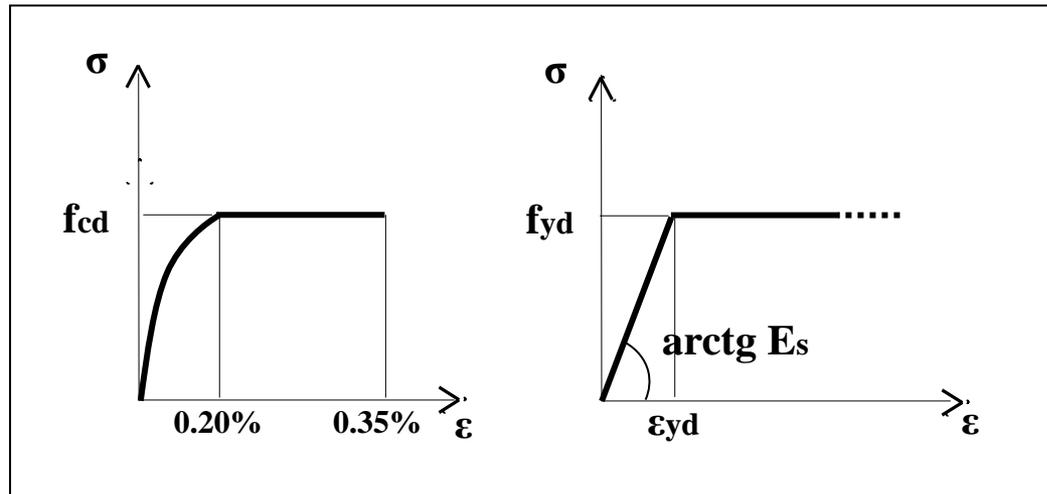
$$M_{Ed} = b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (H/2 - \lambda \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_s (H/2 - c') + A_s \cdot \sigma_s (H/2 - c)$$

*Equilibrio alla rotazione rispetto all'asse passante per il baricentro geometrico G*



## Regioni di rottura

(individuate dalla deformata della sezione)



# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Posizione ASSE NEUTRO

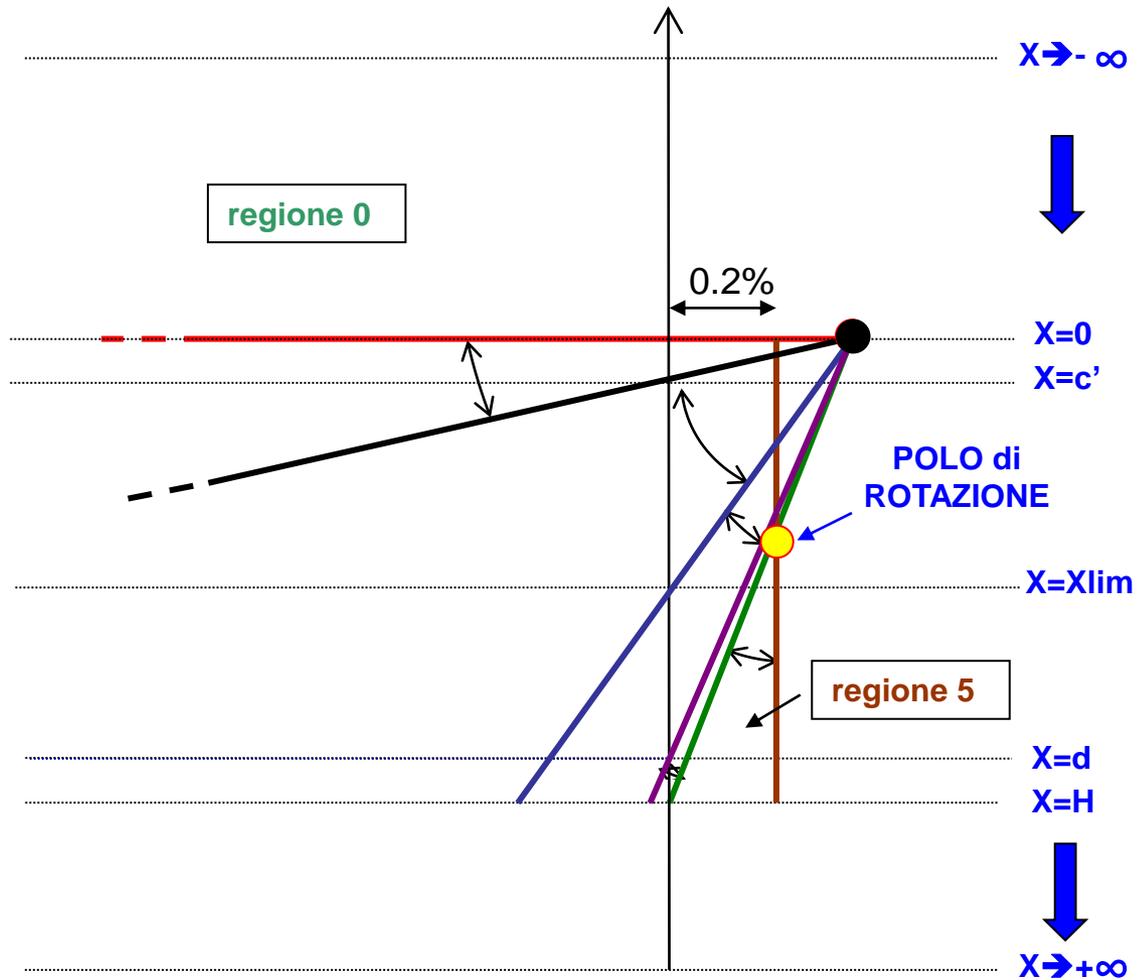
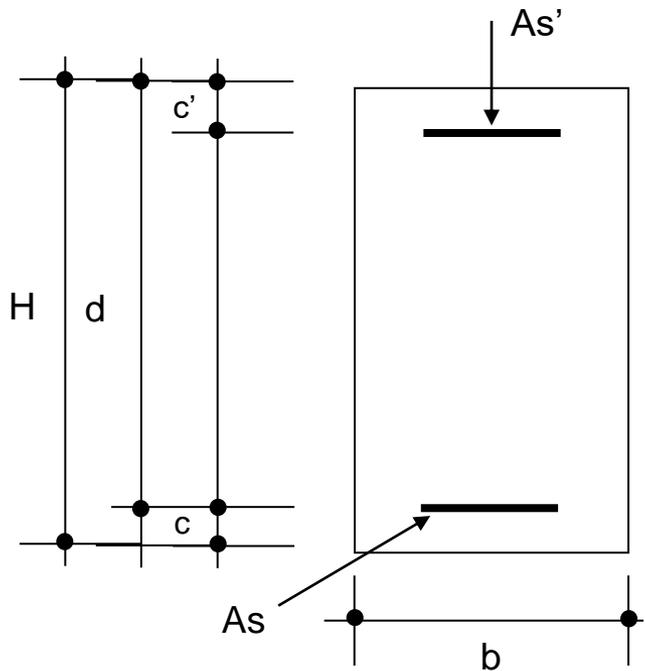
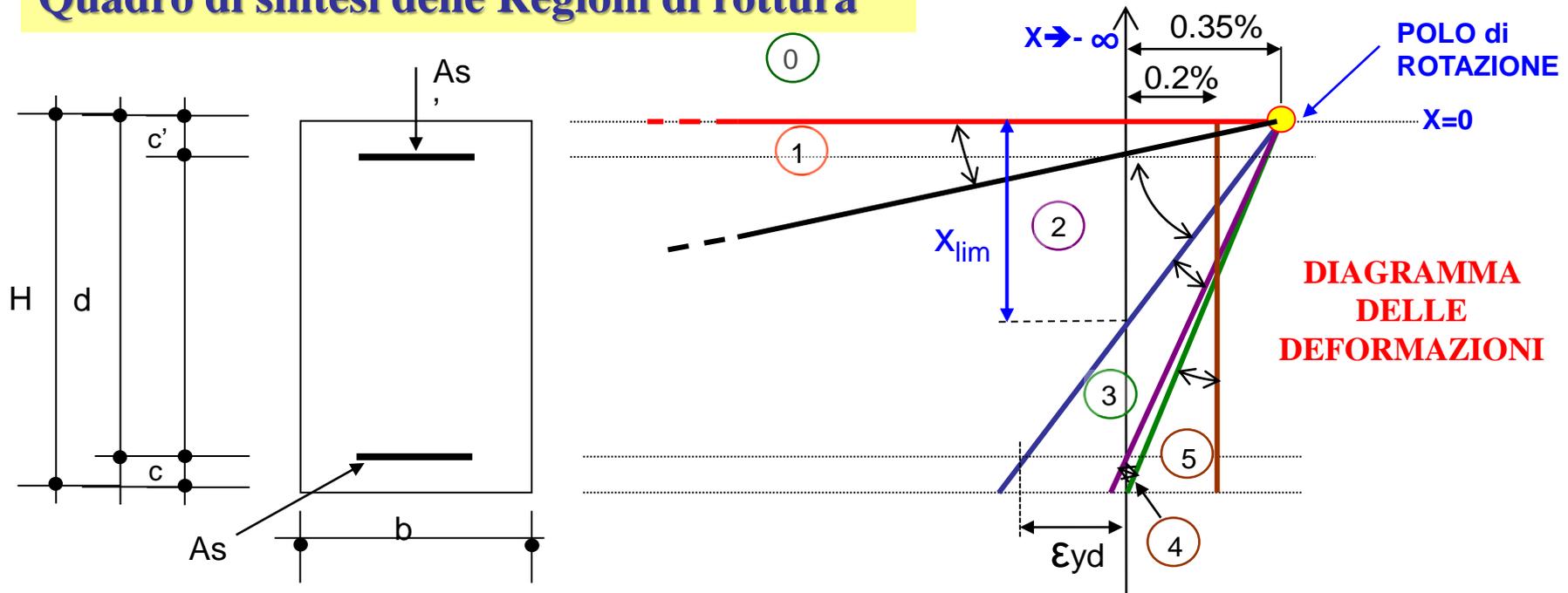


DIAGRAMMA  
DELLE DEFORMAZIONI

# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

## Quadro di sintesi delle Regioni di rottura



**Regione 0:** posizione asse neutro  $-\infty < x < 0 \rightarrow$  trazione semplice o composta

**Regione 1:** posizione asse neutro  $0 \leq x < c' \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 2:** posizione asse neutro  $c' \leq x < x_{lim} \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 3:** posizione asse neutro  $x_{lim} \leq x < h \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 4:** posizione asse neutro  $h \leq x < H \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 5:** posizione asse neutro  $H \leq x < \infty \rightarrow$  compressione semplice o composta

# REGIONE DI ROTTURA 0

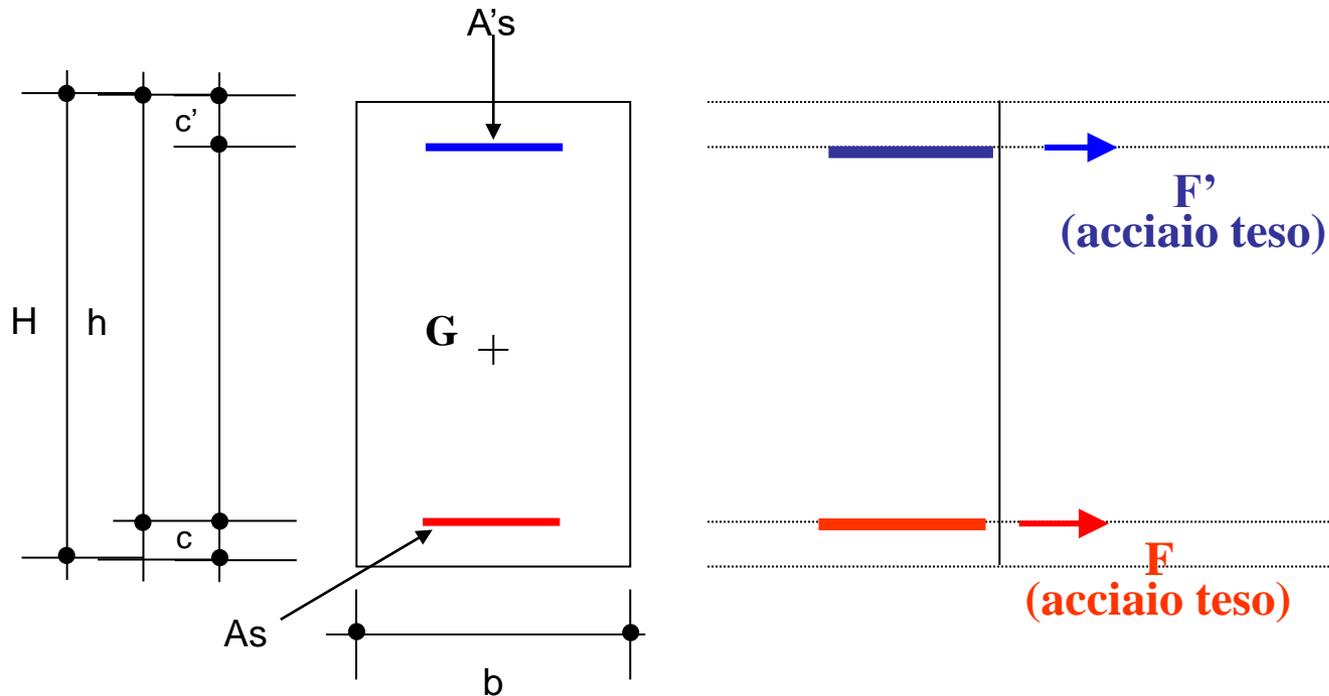
Posizione asse neutro  $-\infty < x < 0$ , trazione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = A'_s \cdot f_{yd} + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = A'_s f_{yd} \left( \frac{H}{2} - c' \right) - A_s f_{yd} \left( \frac{H}{2} - c \right)$$

NOTA: L'acciaio (sia teso che compresso) è sempre snervato



# REGIONE DI ROTTURA 1

Posizione asse neutro:  $0 \leq x < c'$ , flessione semplice o composta

Equazioni di congruenza

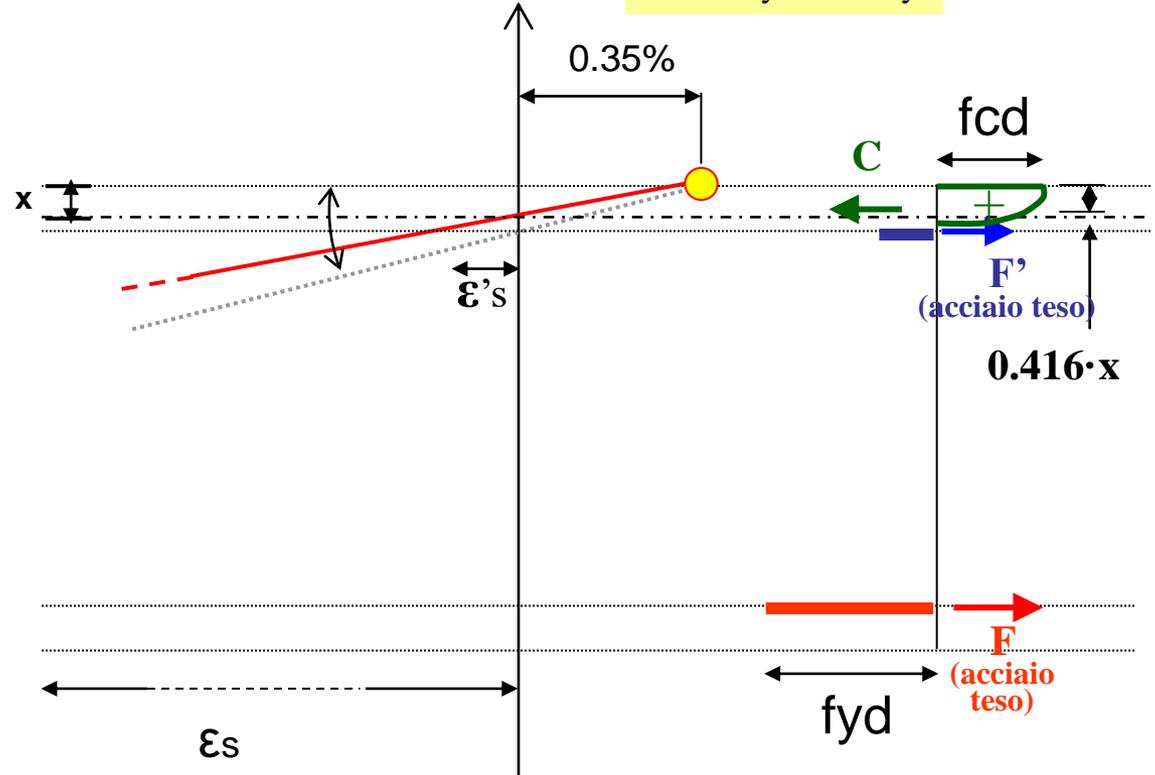
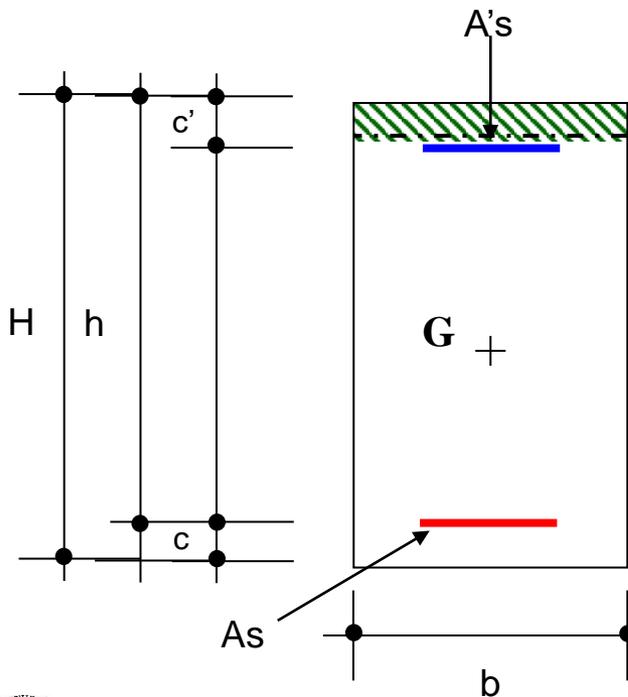
$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{c' - x} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$



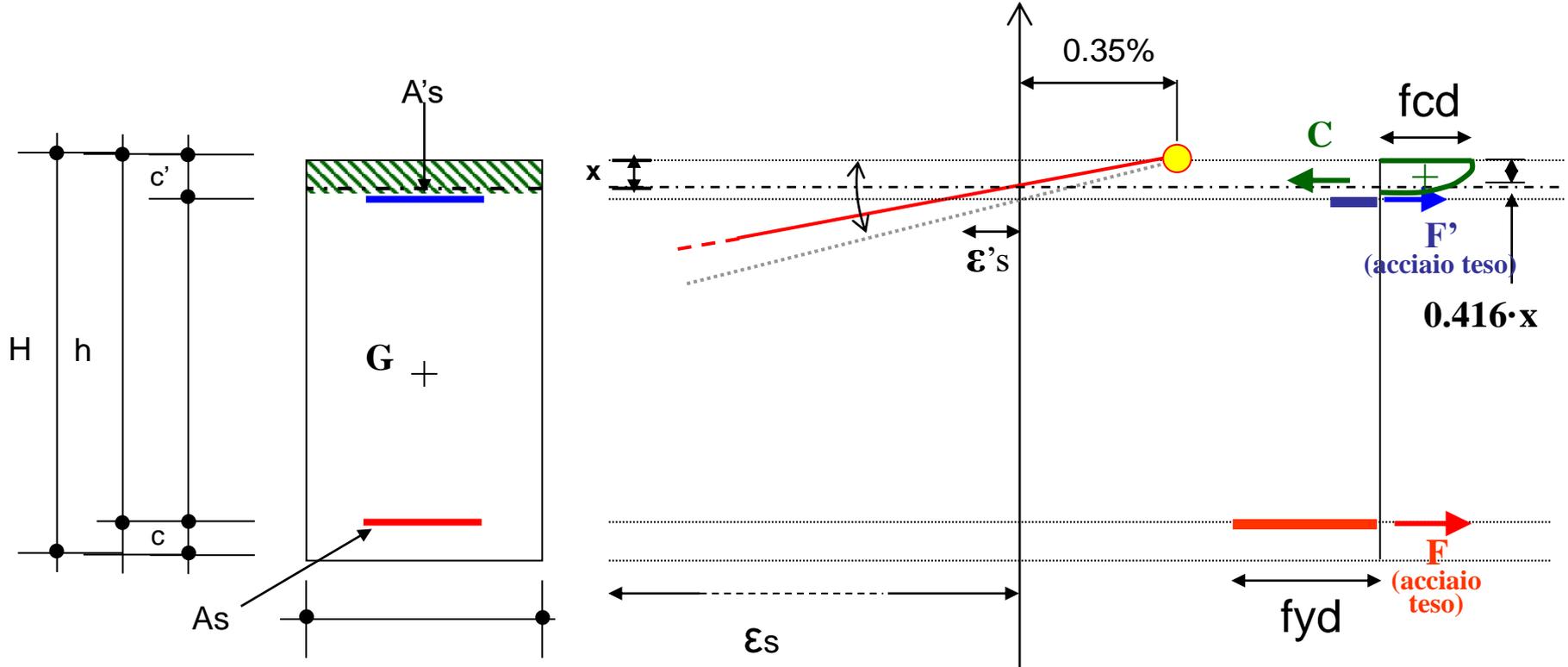
# REGIONE DI ROTTURA 1

Posizione asse neutro:  $0 \leq x < c'$ , flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{Rd} = +b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - 0.416 \cdot x \right) - A'_s \cdot \sigma'_s \left( \frac{H}{2} - c' \right) + f_{yd} \cdot A_s \left( \frac{H}{2} - c \right)$$



# REGIONE DI ROTTURA 2

Posizione asse neutro  $c' \leq x < x_{lim}$ , flessione semplice o composta

Equazioni di congruenza

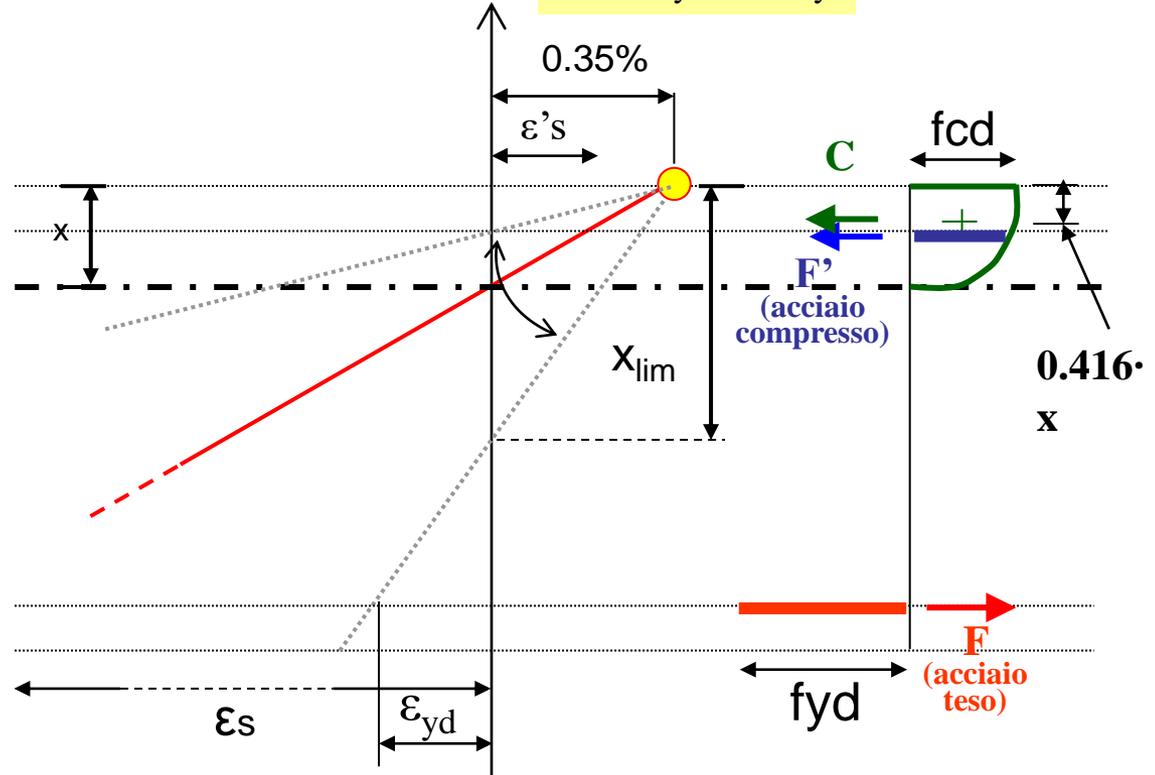
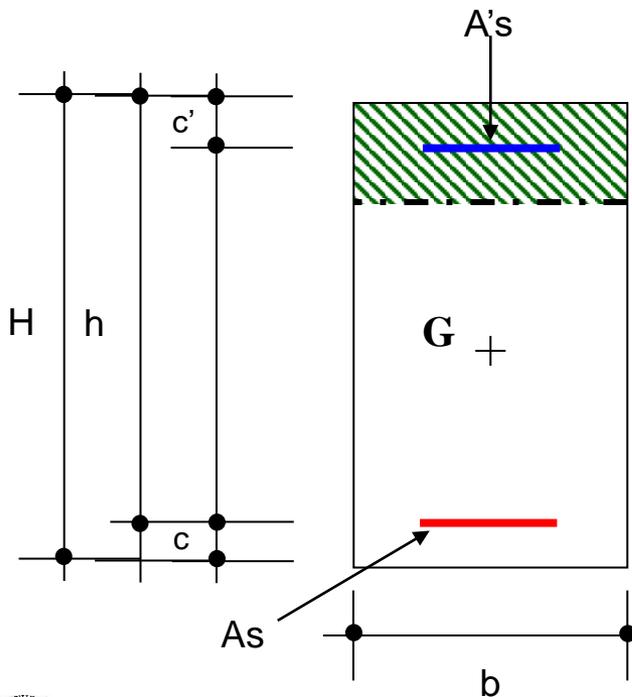
$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$



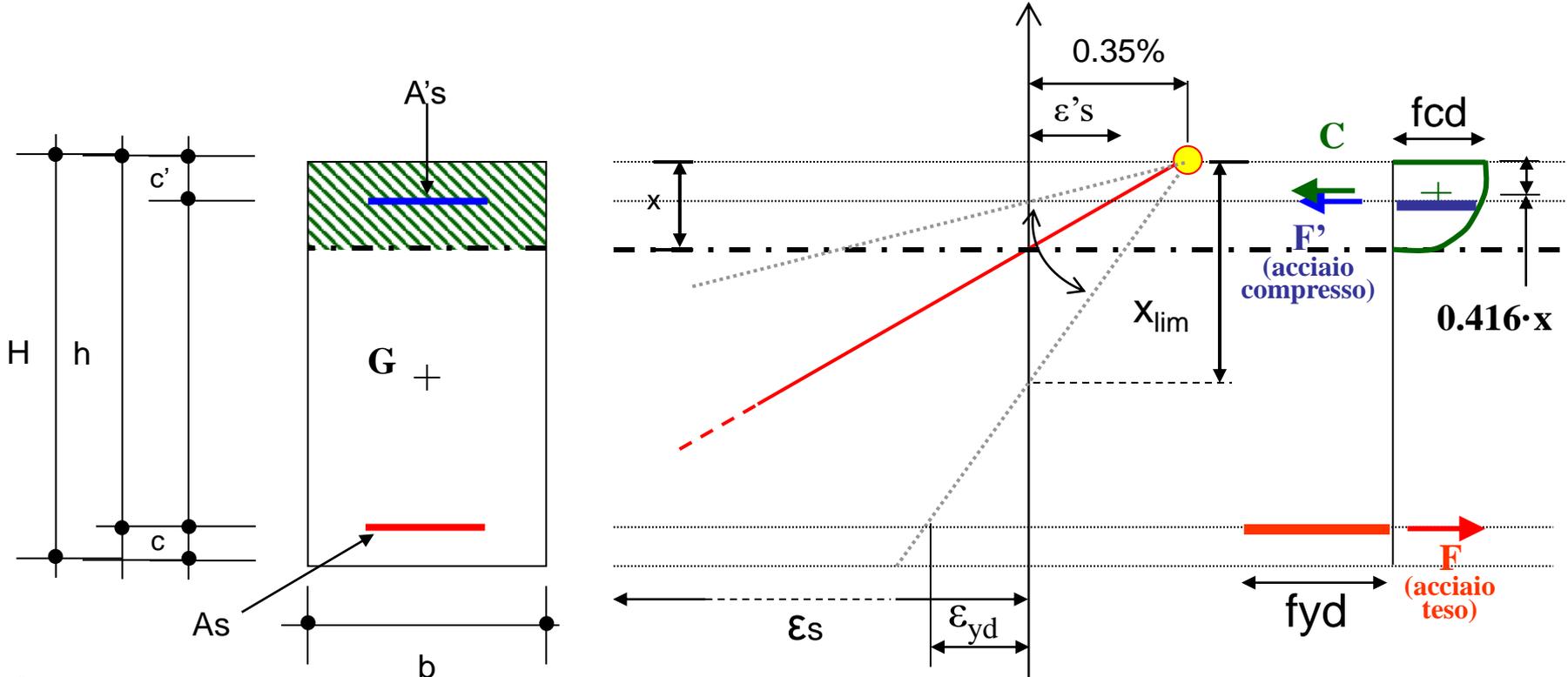
# REGIONE DI ROTTURA 2

Posizione asse neutro  $c' \leq x < x_{lim}$ , flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (H/2 - 0.416 \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_s (H/2 - c') + A_s \cdot f_{yd} (H/2 - c)$$

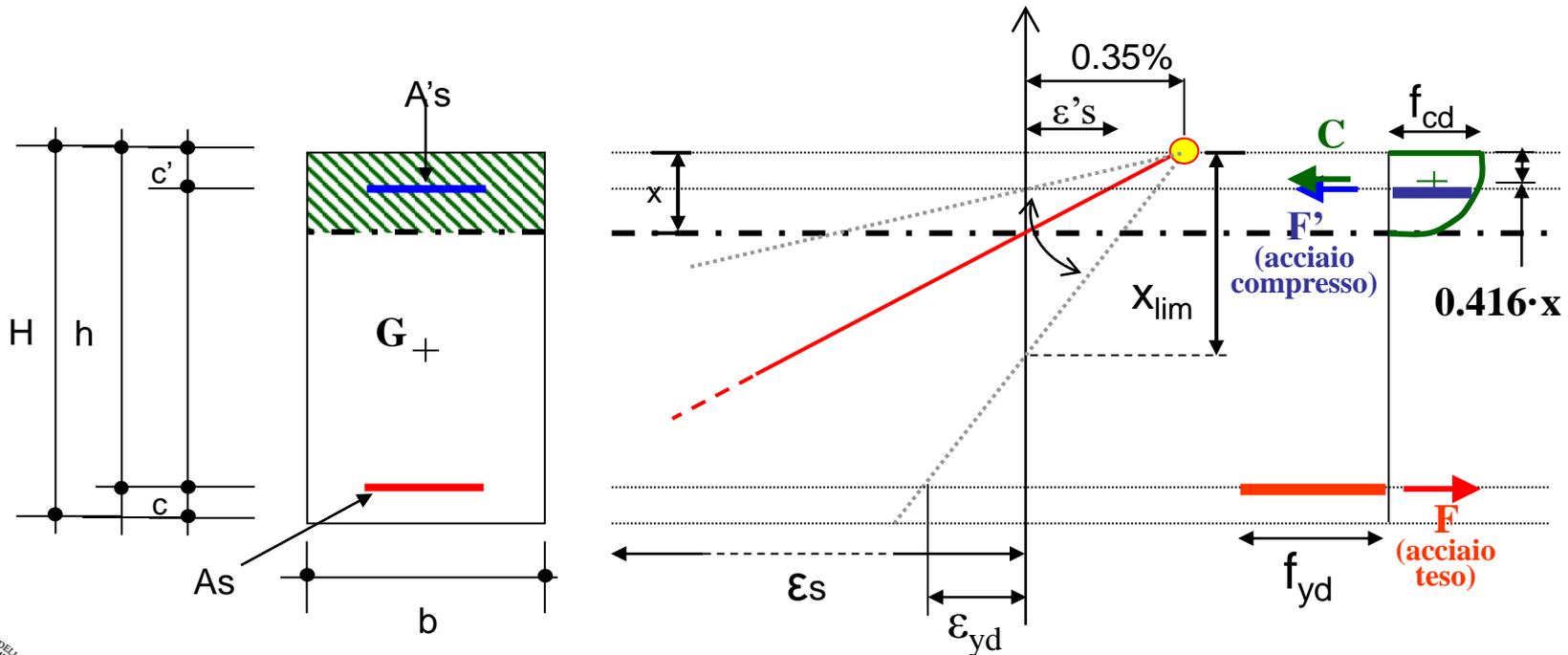


## REGIONE DI ROTTURA 2

$x_{lim}$  è la posizione assunta dall'asse neutro caratterizzata dal valore della deformazione dell'acciaio teso pari a quello di snervamento  $\epsilon_{yd}$ .

Per acciai B450C  $x_{lim}$  vale:

$$\frac{x_{lim}}{0.35\%} = \frac{h - x_{lim}}{\epsilon_{yd}} \Rightarrow x_{lim} = \frac{0.35\% \cdot h}{0.35\% + \epsilon_{yd}} \approx 0.65h \quad (\epsilon_{yd} = 0.186\%)$$



# REGIONE DI ROTTURA 3

Posizione asse neutro  $x_{lim} = < x < h$ , flessione semplice o composta

Equazioni di congruenza

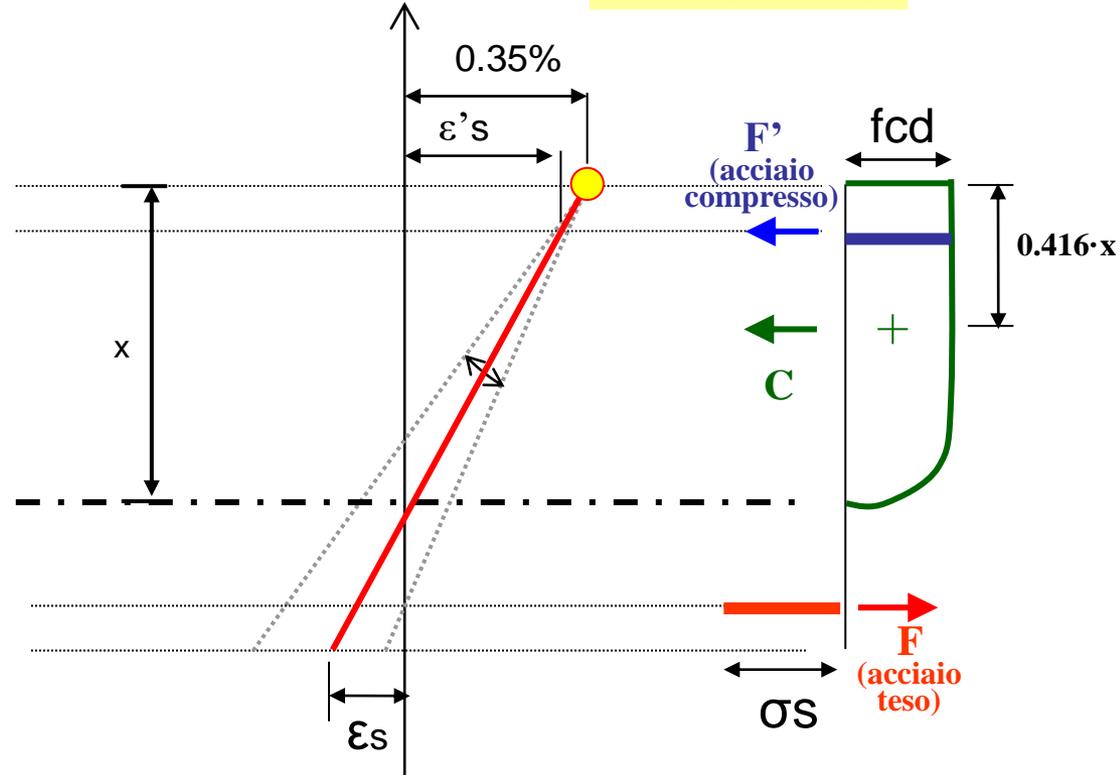
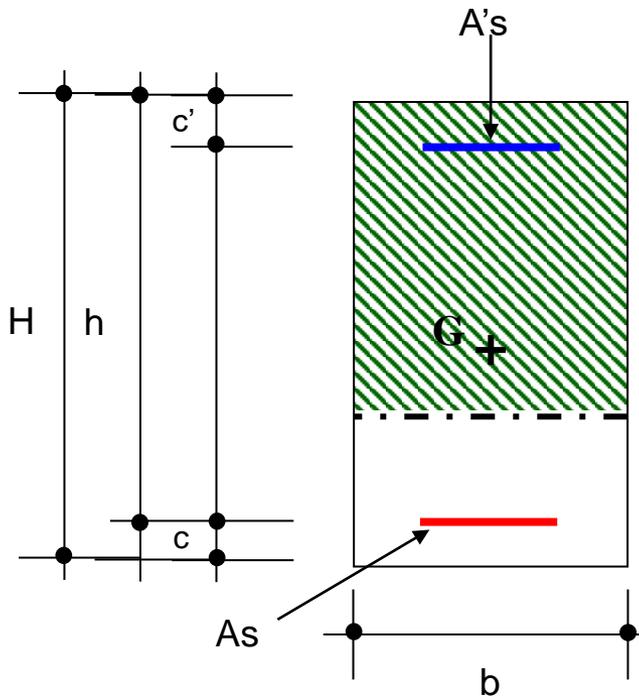
$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$



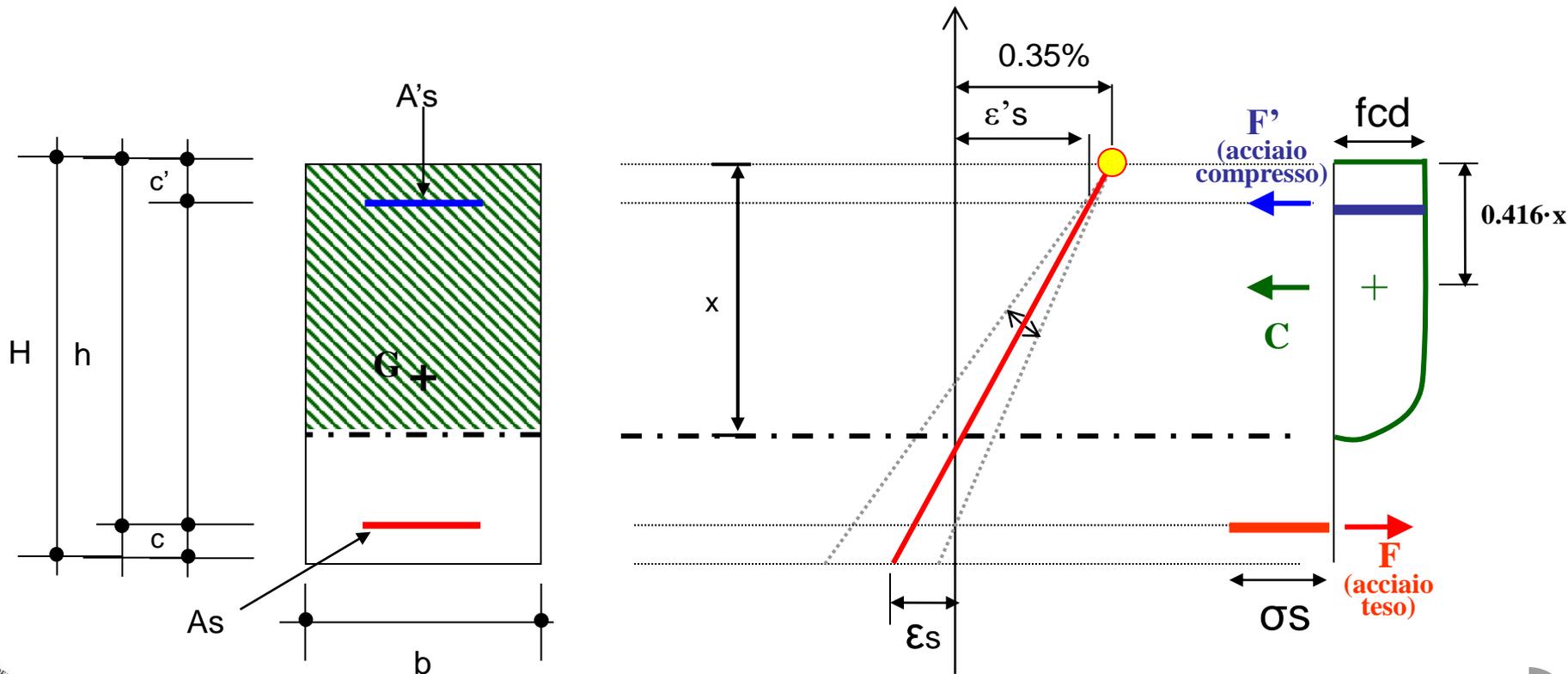
# REGIONE DI ROTTURA 3

Posizione asse neutro  $x_{lim} \leq x < h$ , flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - 0.416 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left( \frac{H}{2} - c' \right) + A_s \cdot \sigma_s \left( \frac{H}{2} - c \right)$$





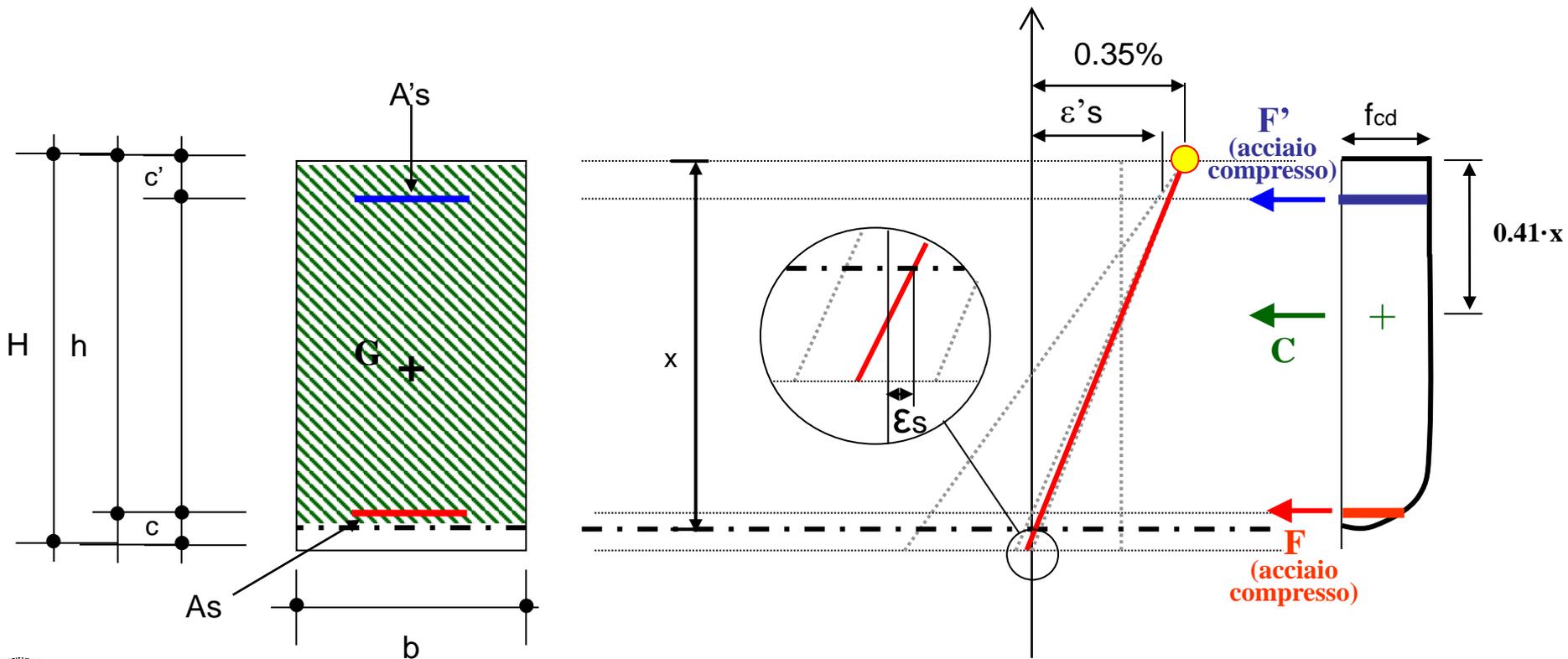
# REGIONE DI ROTTURA 4

Posizione asse neutro  $h \leq x < H$ , flessione semplice o composta

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - 0.416 \cdot x \right) + A'_s \cdot f_{yd} \cdot (H/2 - c') - A_s \cdot \sigma_s \cdot (H/2 - c)$$



# REGIONE DI ROTTURA 5

**Posizione asse neutro  $H = < x < \infty$ , compressione semplice o composta**

Equazioni di congruenza

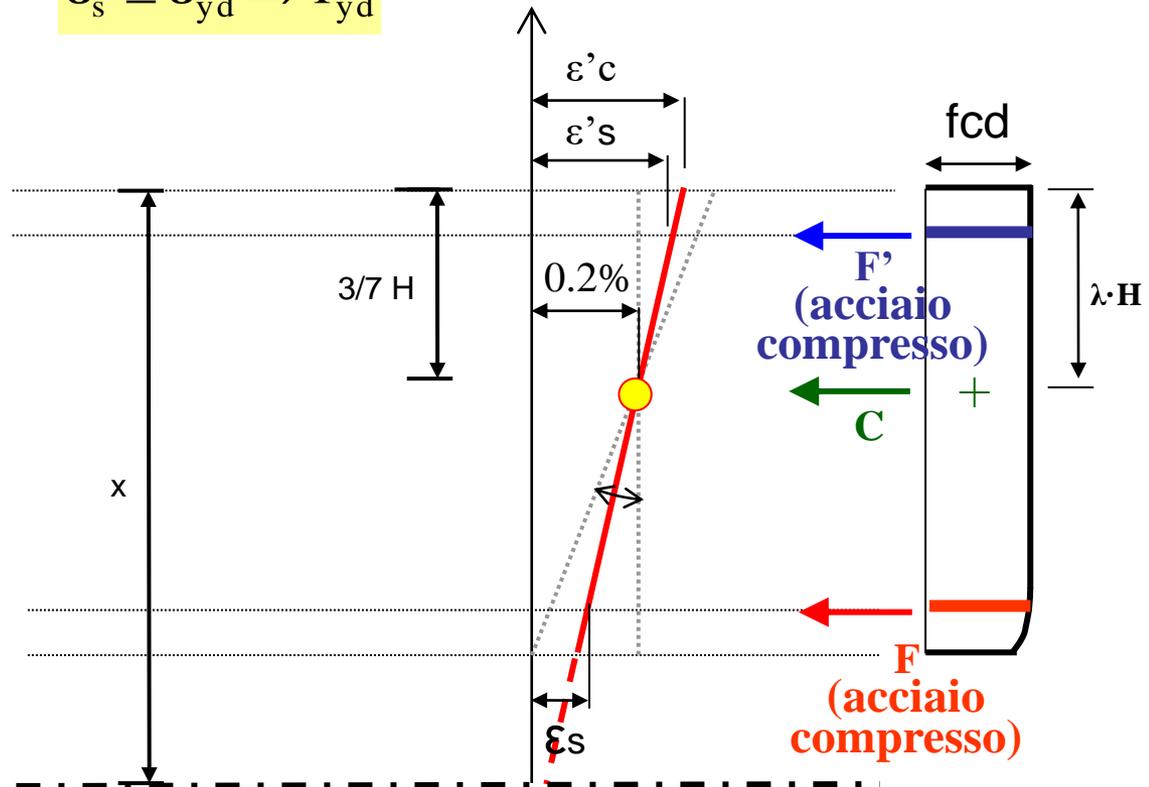
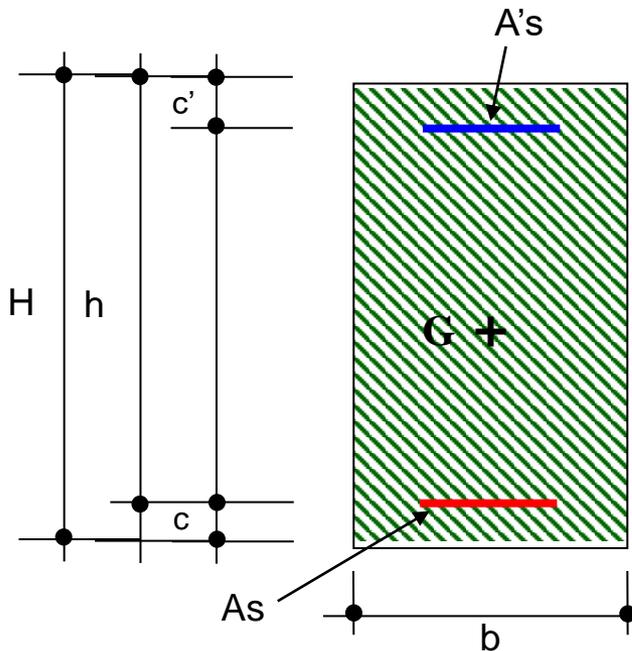
$$\frac{0.20\%}{x - 3/7H} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{x - h}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$





# REGIONE DI ROTTURA 5

Tabella dei parametri  $\psi$  e  $\lambda$  per la regione 5 al variare del rapporto  $\xi = x/h$

$\xi$	$\psi$	$\lambda$	$\xi$	$\psi$	$\lambda$
1,00	0,80953	0,41597	1,65	0,95831	0,48446
1,05	0,83894	0,43144	1,70	0,96153	0,48571
1,10	0,86204	0,44284	1,75	0,96438	0,48681
1,15	0,88049	0,45153	1,80	0,96693	0,48779
1,20	0,89548	0,45832	1,90	0,97127	0,48944
1,25	0,90782	0,46374	2,00	0,97481	0,49007
1,30	0,91809	0,46814	2,25	0,98125	0,49318
1,35	0,92674	0,47177	2,50	0,98551	0,49475
1,40	0,93409	0,47480	2,75	0,98846	0,49583
1,45	0,94039	0,47736	3,00	0,99059	0,49661
1,50	0,94583	0,47954	3,50	0,99341	0,49763
1,55	0,95054	0,48142	4,00	0,99513	0,49825
1,60	0,95467	0,48304	5,00	0,99702	0,49893
			> 5,00	1,00000	0,50000

# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

## NTC 2018, §4.1.2.3.4.2 Verifiche di resistenza e duttilità

La *verifica di resistenza* (SLU) si ritiene soddisfatta se risulta:

$$M_{Rd} = M_{Rd}(N_{Ed}) \geq M_{Ed}$$

dove:

- $M_{Rd}$  è il valore di calcolo del momento resistente corrispondente a  $N_{Ed}$
- $N_{Ed}$  è il valore di calcolo della componente assiale (sforzo normale) dell'azione;
- $M_{Ed}$  è il valore di calcolo della componente flettente dell'azione.

Al fine di determinare il **momento resistente**  $M_{Rd}$  è necessario valutare la **posizione dell'asse neutro** ( $x$ )

# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

---

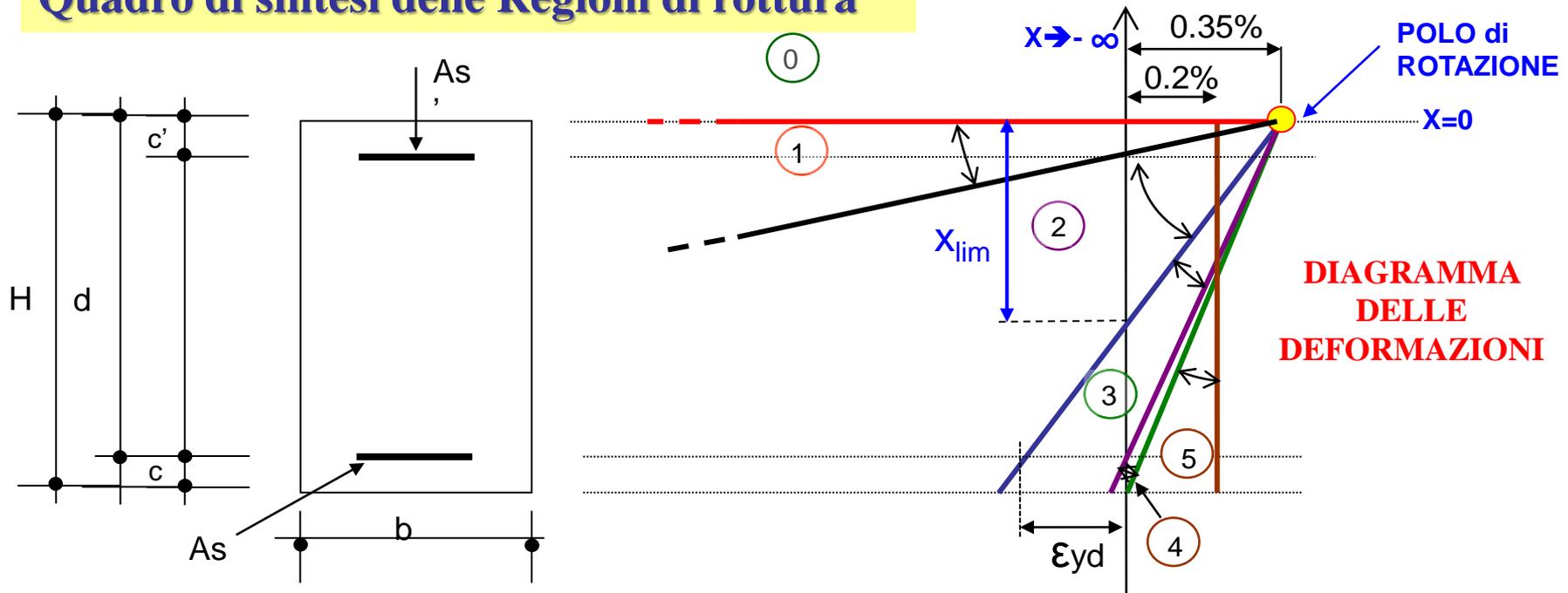
La procedura per la valutazione della posizione dell'asse neutro si può sintetizzare in 5 passi:

- 1) si ipotizza la regione di rottura e una posizione di tentativo dell'asse neutro;
- 2) si valuta la tensione dell'acciaio teso/compresso (snervato o in fase elastica) e il coefficiente  $\psi$
- 3) si impone l'equilibrio alla traslazione e si determina la posizione dell'asse neutro
- 4) si itera le fasi (2)-(3) con il valore di  $x$  determinato in (3) fino a ridurre lo scarto relativo tra due iterazioni
- 5) nota la posizione dell'asse neutro (e di  $\lambda$ ) si calcola il valore del momento resistente imponendo l'equilibrio alla rotazione

NOTA: per le regioni 1÷4, il valore di  $x$  è univocamente determinato dalla (3) ipotizzando la sola condizione sulla tensione dell'acciaio teso/compresso ( $\psi$  è costante)

# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

## Quadro di sintesi delle Regioni di rottura



**Regione 0:** posizione asse neutro  $-\infty < x < 0 \rightarrow$  trazione semplice o composta

**Regione 1:** posizione asse neutro  $0 \leq x < c' \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 2:** posizione asse neutro  $c' \leq x < x_{lim} \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 3:** posizione asse neutro  $x_{lim} \leq x < h \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 4:** posizione asse neutro  $h \leq x < H \rightarrow$  flessione semplice o composta

**Regione 5:** posizione asse neutro  $H \leq x < \infty \rightarrow$  compressione semplice o composta

# VERIFICHE AGLI STATI LIMITE ULTIMI

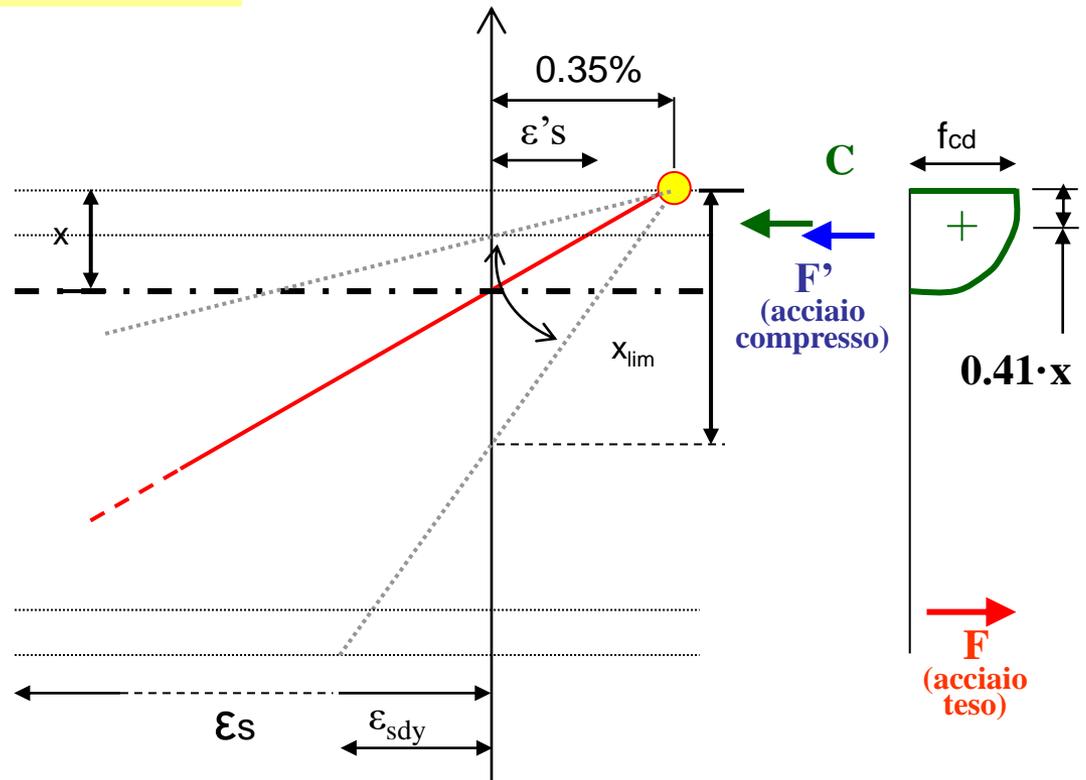
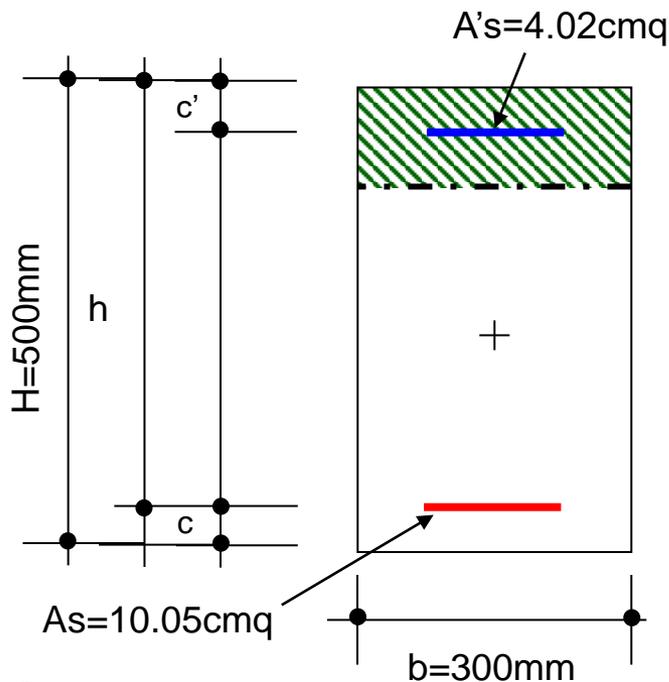
## Esempio: sezione semplicemente inflessa

- ipotesi 1: siamo in regione di rottura 2
- ipotesi 2: l'acciaio compresso è snervato  $\Rightarrow \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd}$

### Dati:

$N=0$

$f_{ck}=20\text{N/mm}^2$ ,  $f_{yk}=450\text{N/mm}^2$   
diagramma  $\sigma$ - $\epsilon$  acciaio tipo (b)



# VERIFICHE AGLI STATI LIMITE ULTIMI

## Esempio: sezione semplicemente inflessa

### • equilibrio alla traslazione

$$-b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} + A_s \cdot f_{yd} = 0$$

### • posizione dell'asse neutro

$$x = \frac{(A_s - A'_s) \cdot f_{yd}}{\psi \cdot b \cdot f_{cd}} = \frac{(1005 - 402) \cdot 391}{0.81 \cdot 300 \cdot 11.3} = 86 \text{ mm}$$

### • verifica delle ipotesi:

$$86 \text{ mm} = x < x_{\text{lim}} = 329 \text{ mm} \Rightarrow \text{verificato}$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \cdot \left(1 - \frac{c'}{x}\right) = 0.0022 > 0.0019 = \frac{f_{yd}}{E_s} \Rightarrow \text{verificato}$$

### Calcolo Momento resistente

Effettuando l'equilibrio rispetto al baricentro geometrico G della sezione si ottiene:

$$M_{Rd} = b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} \left(\frac{H}{2} - \lambda x\right) + A'_s \cdot f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c'\right) + A_s \cdot f_{yd} \left(\frac{H}{2} - c\right)$$

Assumendo  $\psi = 0.81$  e  $\lambda = 0.41$  si calcola:

$$M_{Rd} = 171.6 \text{ kNm}$$

# S.L.U.: SFORZO NORMALE E FLESSIONE

---

## Dalle NTC 2018: Analisi della sezione

*Nel caso di pilastri soggetti a compressione assiale, si deve comunque assumere una componente flettente dello sforzo  $M_{Ed} = e \times N_{Ed}$  con eccentricità  $e$  pari almeno a  $0,05h \geq 20\text{mm}$  (con  $h$  altezza della sezione).*

## Dalla Circolare alle NTC 2018

### *C4.1.2.3.4.2 Analisi della sezione*

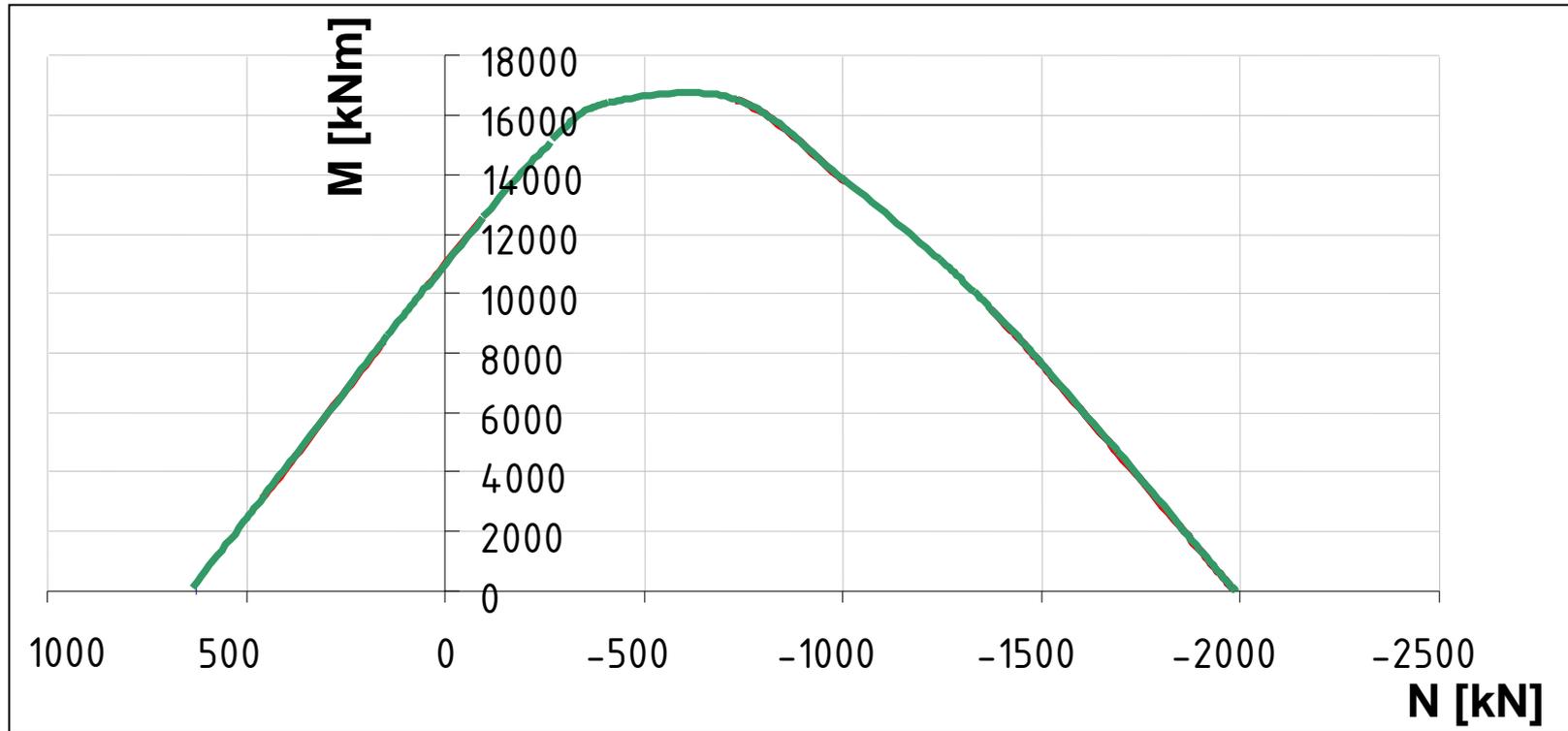
*Con riferimento alla verifica di resistenza dei pilastri in c.a. soggetti a sola compressione assiale, la prescrizione circa l'eccentricità minima dell'azione assiale da tenere in conto può essere implicitamente soddisfatta valutando  $N_{Rd}$  con la formula:*

$$N_{Rd} = 0,8 A_c f_{cd} + A_{s,tot} f_{yd}$$

*con  $A_c$  area del calcestruzzo e  $A_{s,tot}$  area totale d'armatura.*

# VERIFICHE AGLI STATI LIMITE ULTIMI: DOMINI M-N

## Esempio di dominio M-N



La frontiera del dominio di resistenza M-N è costituita dal luogo dei punti del piano N-M corrispondenti alle coppie di coordinate M (momento flettente) ed N (sforzo normale) che determinano la crisi della sezione

# Domini M – N allo Stato Limite Ultimo

---

## Verifica delle sezioni mediante domini M-N

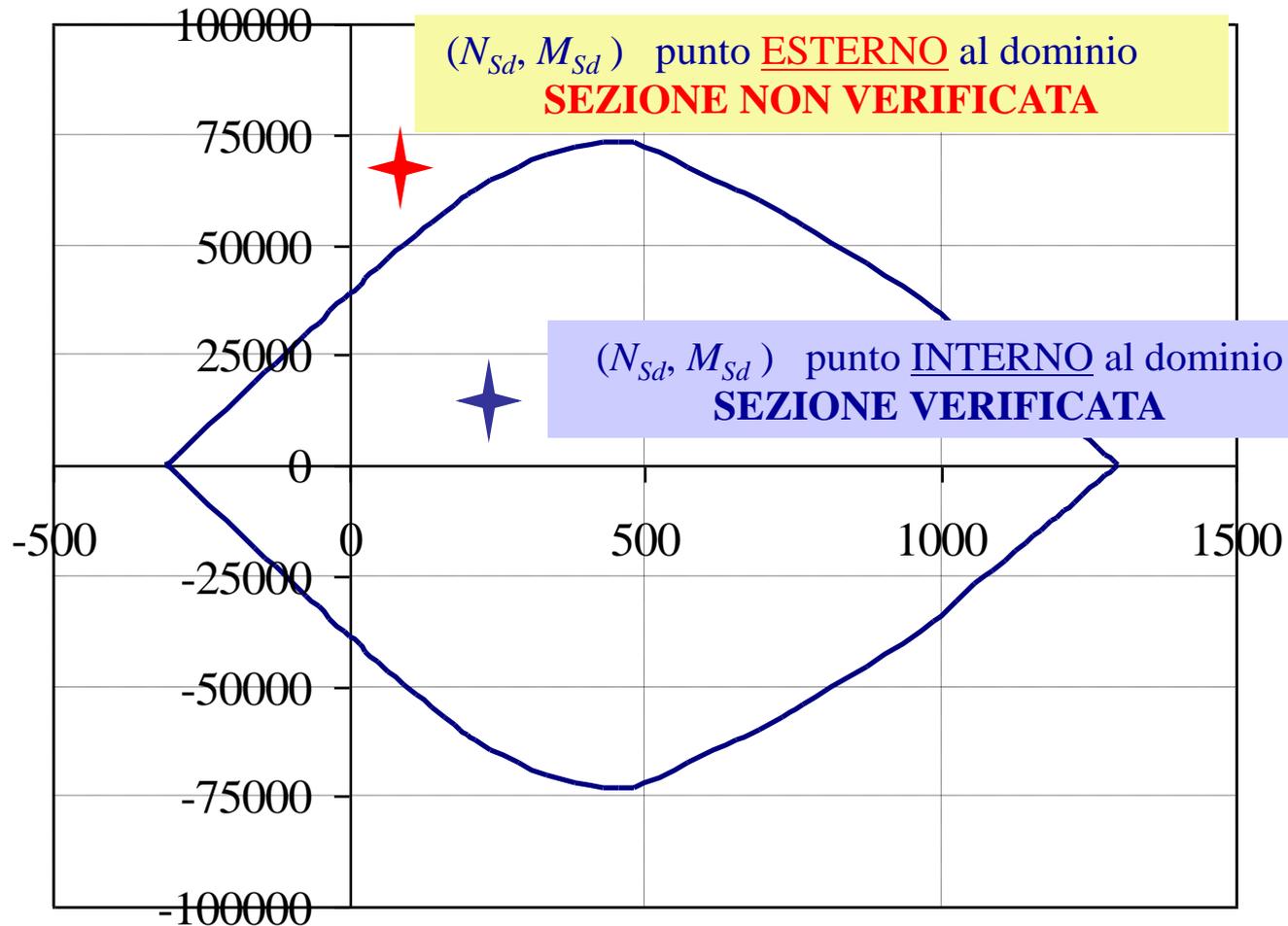
1. Si costruisce il dominio di resistenza M-N della sezione utilizzando le *equazioni di congruenza*, di *equilibrio alla traslazione* e di *equilibrio alla rotazione*.
2. Si considera la coppia  $M_{Sd}$  ed  $N_{Sd}$  (momento flettente e sforzo normale) che sollecita la sezione.
3. Si riporta sul diagramma il punto di coordinate  $(N_{Sd}, M_{Sd})$
4. Si presentano due possibilità:

$(N_{Sd}, M_{Sd})$  punto INTERNO al dominio → **SEZIONE VERIFICATA**

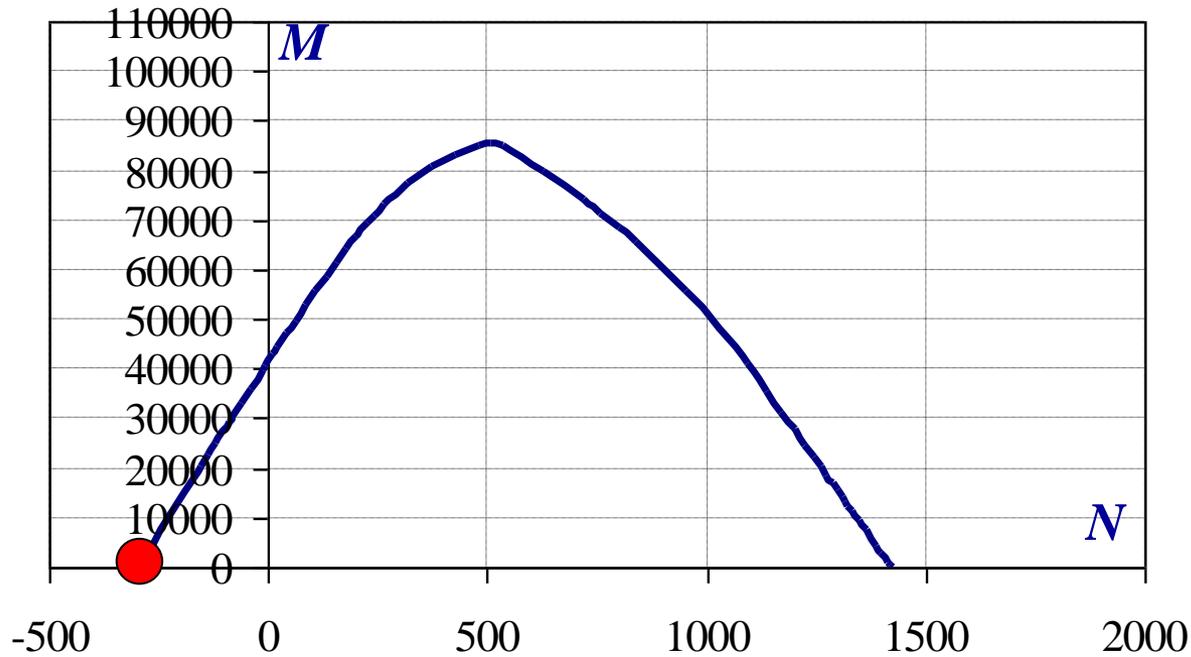
$(N_{Sd}, M_{Sd})$  punto ESTERNO al dominio → **SEZIONE NON VERIFICATA**

# Domini M – N allo Stato Limite Ultimo

## Verifica delle sezioni mediante domini M-N



# Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



Regione di rottura 0

a.n.  $-\infty < x \leq 0$

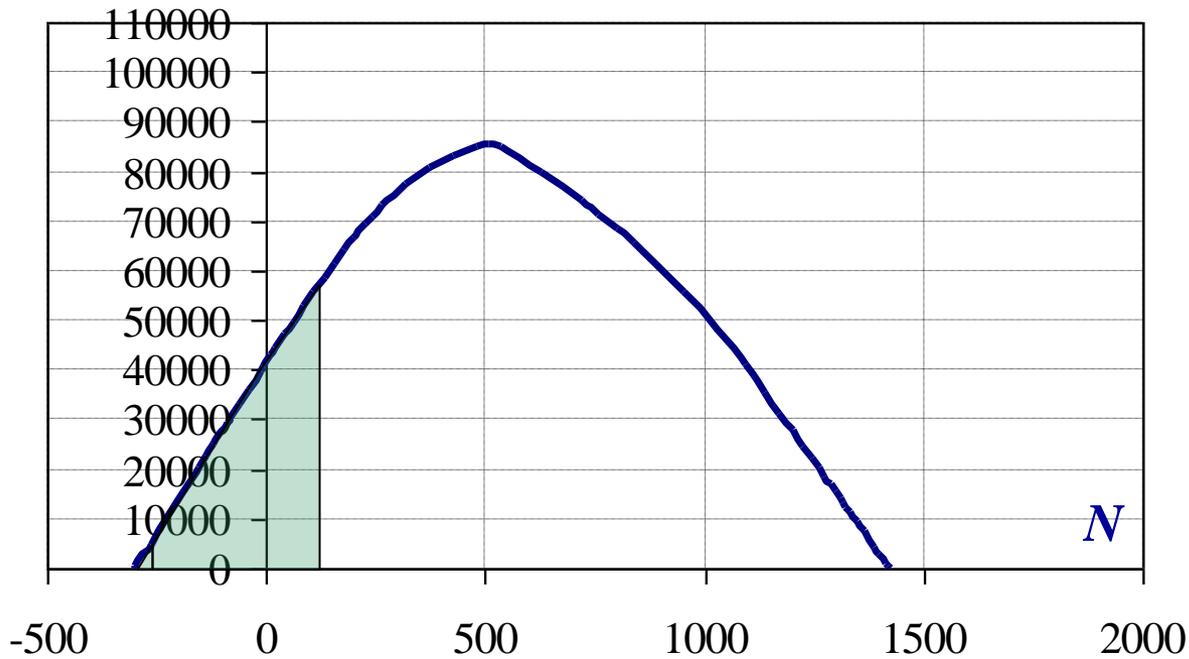
Lo sforzo normale di trazione e del momento resistente nel dominio M-N è un punto il cui valore si ricava dalle due equazioni di equilibrio

**NOTA:  $M_{rd} = 0$  per sezioni con armatura simmetrica**

$$N_{Rd} = +A'_s \cdot f_{yd} + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = A'_s f_{yd} \left( \frac{H}{2} - c' \right) - A_s f_{yd} \left( \frac{H}{2} - c \right)$$

# Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



## Regione di rottura 1

$$\text{a.n. } 0 \leq x < c'$$

## Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{c' - x} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

## Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

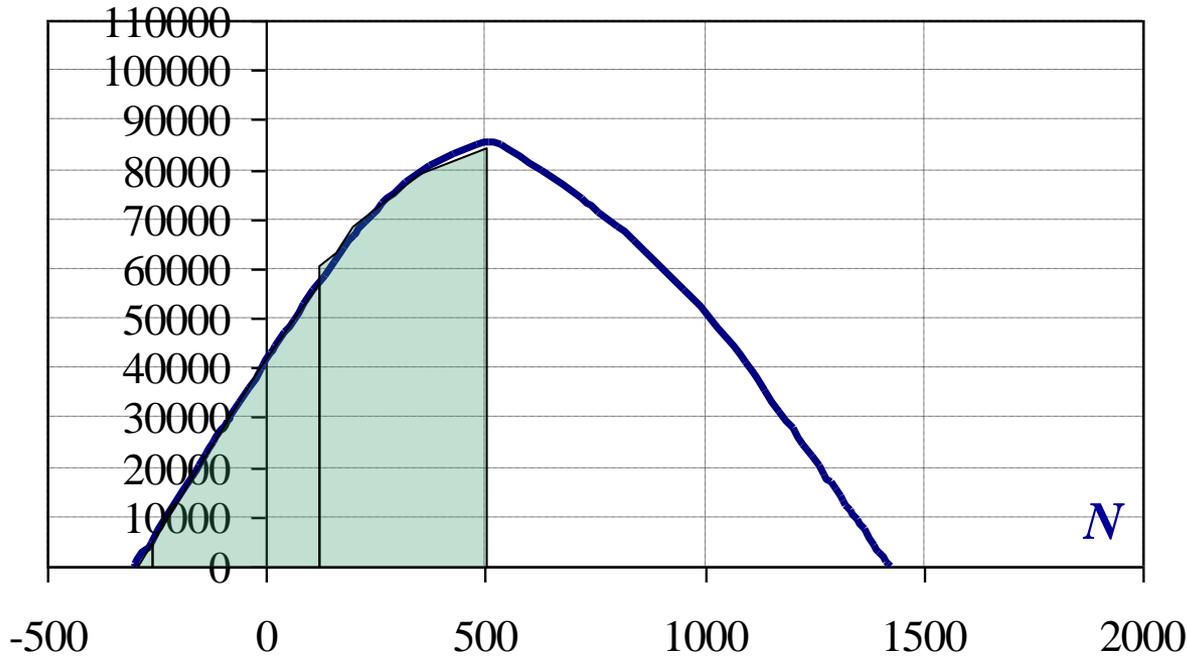
$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

## Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left( H/2 - 0.41 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left( H/2 - c' \right) - A_s \cdot f_{yd} \left( H/2 - c \right)$$

# Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



## Regione di rottura 2

$$\text{a.n. } c' \leq x < x_{\text{lim}}$$

## Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

## Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

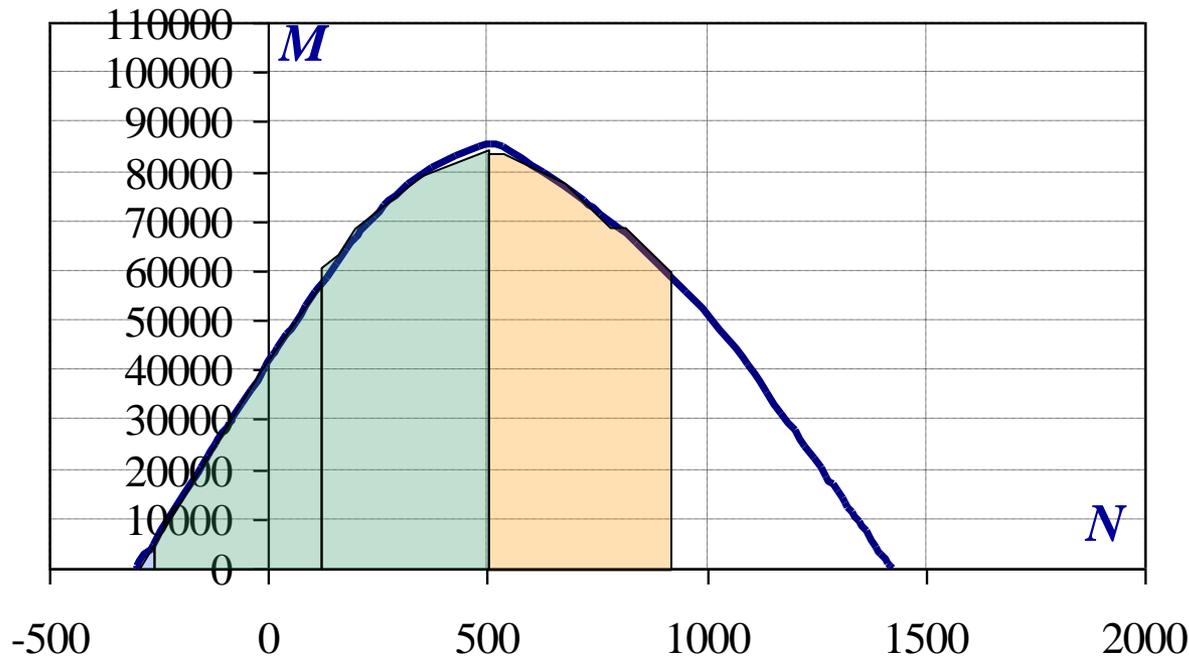
$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

## Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{yd}$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left( H/2 - 0.41 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left( H/2 - c' \right) + A_s \cdot f_{yd} \left( H/2 - c \right)$$

# Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



## Regione di rottura 3

$$\text{a.n. } x_{\text{lim}} \leq x < h$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{h - x}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s$$

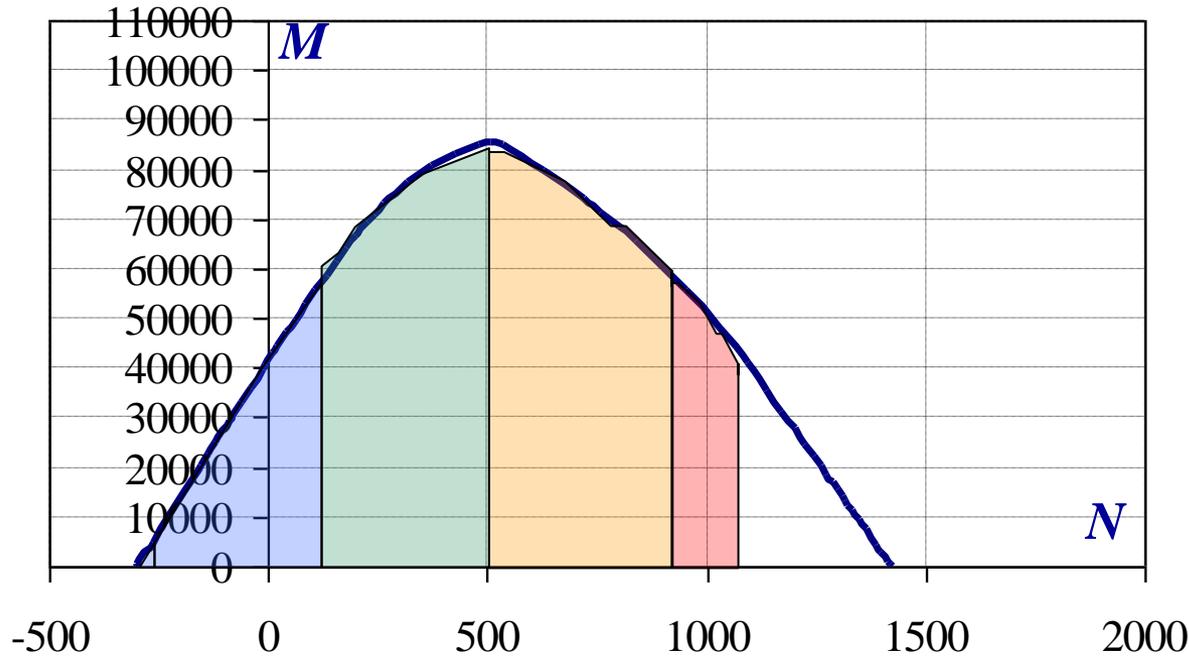
$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \left( H/2 - 0.416 \cdot x \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \left( H/2 - c' \right) + A_s \cdot \sigma_s \left( H/2 - c \right)$$

# Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



## Regione di rottura 4

$$\text{a.n. } h \leq x < H$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.35\%}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{x - h}$$

Equazioni costitutive

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

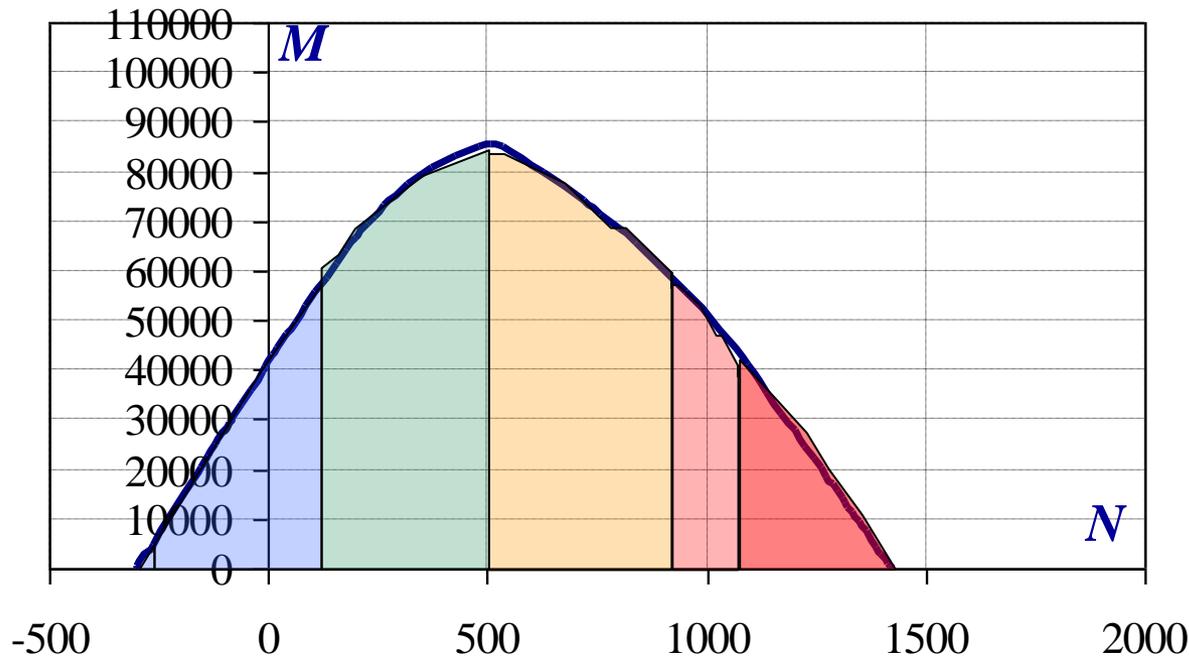
$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot 0.81 \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot 0.81 \cdot H \cdot f_{cd} \cdot \left( H/2 - 0.41 \cdot x \right) + A'_s \cdot f_{yd} \left( H/2 - c' \right) - A_s \cdot \sigma_s \left( H/2 - c \right)$$

# Costruzione del dominio M – N allo Stato Limite Ultimo



## Regione di rottura 5

$$\text{a.n. } H \leq x < \infty$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{0.20\%}{x - 3/7 H} = \frac{\varepsilon'_s}{x - c'} = \frac{\varepsilon_s}{x - h}$$

$$\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

$$\varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s$$

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_{yd}$$

## Equazioni di equilibrio

$$N_{Rd} = -b \cdot \psi \cdot x \cdot f_{cd} - A'_s \cdot f_{yd} - A_s \cdot \sigma_s$$

$$M_{rd} = b \cdot \psi \cdot H \cdot f_{cd} \cdot (\lambda \cdot H - H/2) + A'_s \cdot f_{yd} (H/2 - c') - A_s \cdot \sigma_s (H/2 - c)$$

# Utilizzo dei domini M – N per progetto-verifica

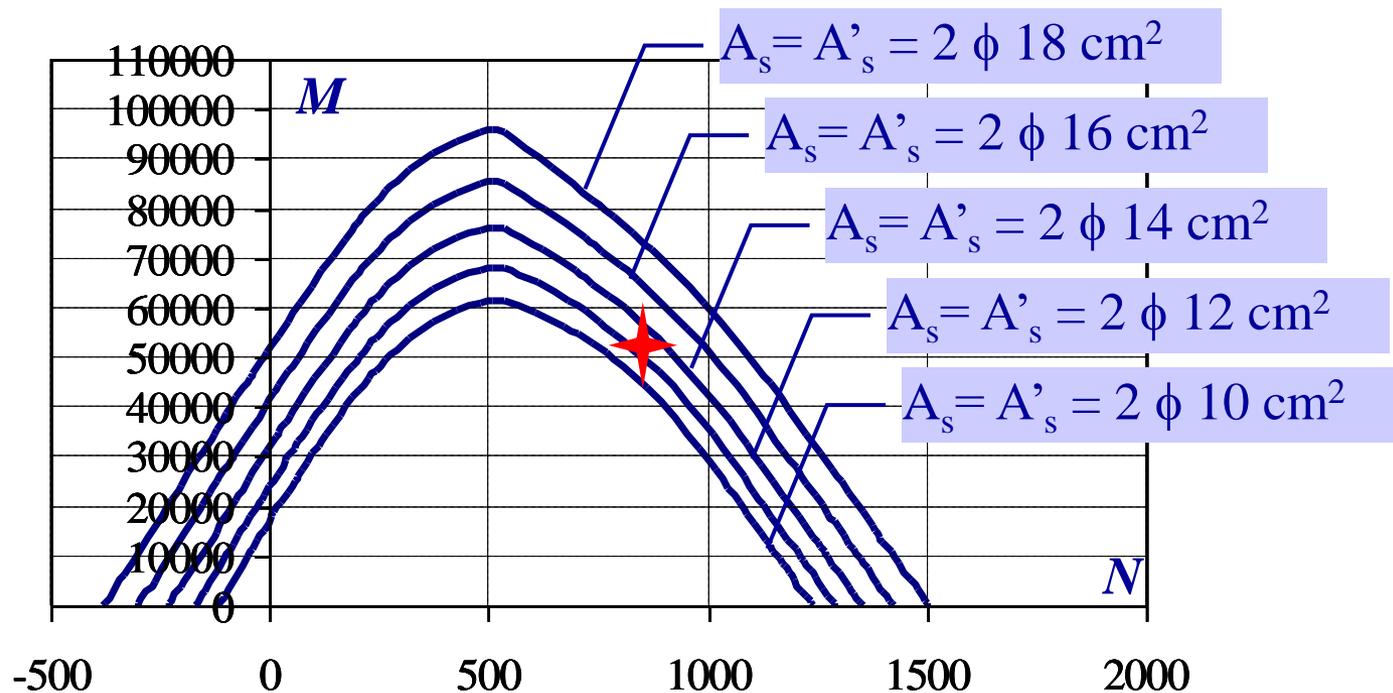
Le dimensioni della sezione sono note.

Si stabilisce a priori il rapporto tra  $A_s$  ed  $A'_s$ ;

Si costruiscono i domini M-N per diverse quantità di armatura.

Si riporta sul diagramma il punto di coordinate  $(N_{sd}, M_{sd})$

Si determina la quantità di armatura necessaria



# Definizione del dominio di resistenza M-N

utilizzo del programma  
VCA SLU (Prof. Gelfi)

Verifica C.A. S.L.U. - File

File Materiali Opzioni Visualizza Progetto Sez. Rett. Sismica Normativa: NTC 2008 ?

Titolo : sezione 30x50

N\* strati barre 2 Zoom

N*	b [cm]	h [cm]
1	30	50

N*	As [cm <sup>2</sup> ]	d [cm]
1	4.02	3
2	4.02	47

Tipo Sezione  
 Rettan.re  Trapezi  
 a T  Circolare  
 Rettangoli  Coord.

Solecitazioni  
S.L.U. Metodo n

N<sub>Ed</sub> 0 kN  
M<sub>xEd</sub> 0 kNm  
M<sub>yEd</sub> 0

P.to applicazione N  
 Centro  Baricentro cls  
 Coord.[cm] xN 0 yN 0

Tipo rottura  
Lato calcestruzzo - Acciaio snervato

Metodo di calcolo  
 S.L.U.+  S.L.U.-  
 Metodo n

Tipo flessione  
 Retta  Deviata

N\* rett. 100

Calcola MRd **Domino M-N**

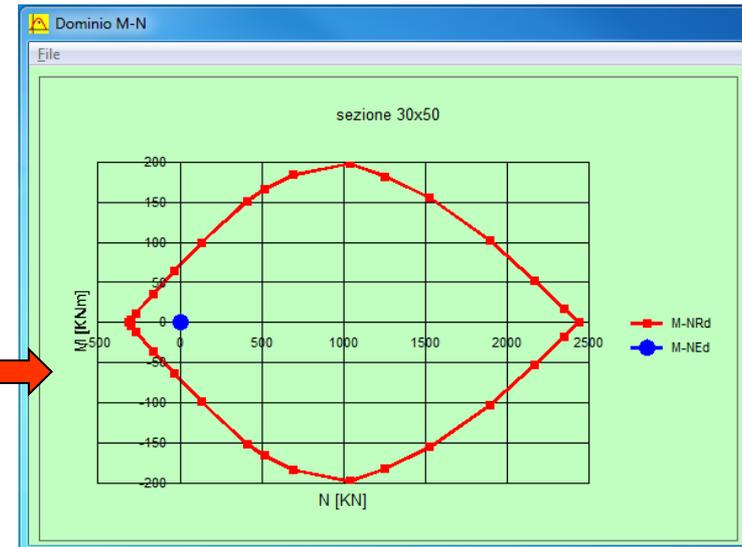
L<sub>0</sub> 0 cm Col. modello

Precompresso

Materiali  
B450C C25/30

$\epsilon_{su}$ 67.5 ‰	$\epsilon_{c2}$ 2 ‰
$f_{yd}$ 391.3 N/mm <sup>2</sup>	$\epsilon_{cu}$ 3.5 ‰
$E_s$ 200,000 N/mm <sup>2</sup>	$f_{cd}$ 14.17
$E_s/E_c$ 15	$f_{cc}/f_{cd}$ 0.8 ?
$\epsilon_{syd}$ 1.957 ‰	$\sigma_{c,adm}$ 9.75
$\sigma_{s,adm}$ 255 N/mm <sup>2</sup>	$\tau_{co}$ 0.6
	$\tau_{c1}$ 1.829

M<sub>xRd</sub> 71.06 kN m  
 $\sigma_c$  -14.17 N/mm<sup>2</sup>  
 $\sigma_s$  391.3 N/mm<sup>2</sup>  
 $\epsilon_c$  3.5 ‰  
 $\epsilon_s$  43.99 ‰  
d 47 cm  
x 3.464 x/d 0.0737  
 $\delta$  0.7



[http://gelfi.unibs.it/software/programmi\\_studenti.html](http://gelfi.unibs.it/software/programmi_studenti.html)